

1910.

LIBRARY
MICHIGAN STATE NORMAL
COLLEGE

No. 3.

ANNALEN DER P H Y S I K.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. U. E. WIEDEMANN, P. DRUDE.

VIERTE FOLGE.

BAND 81. HEFT 3.

DER GANZEN REIHE 386, BANDS 3. HEFT.

KURATORIUM:

F. KOHLRAUSCH, M. PLANCK, G. QUINCKE,
W. C. RÖNTGEN, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK.

MIT EINEM PORTRAT.



LEIPZIG, 1910.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIIUS BARTH.

DÖRRRIENSTRASSE 16.

Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen, von den Postämtern und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Preis für den in 15 Heften (= 3 Bänden) ausgegebenen Jahrgang 45 M.

(Ausgegeben am 1. März 1910.)

Inhalt.

	Seite
Friedrich Kohlrausch †. Nachruf. (Mit Porträt) . . .	449
1. Clemens Schaefer und Felix Grossmann. Untersuchungen über die Beugung elektromagnetischer Wellen an dielektrischen Zylindern.	455
2. R. Seeliger. Über Ionenadsorption an fallenden Wasser- tropfen	500
3. W. Heil. Diskussion der Versuche über die träge Masse be- wegter Elektronen	519
4. M. Laue. Zur Thermodynamik der Beugung	547
5. Gerhard Rudert. Änderung des Leitvermögens von festem Kupferjodür im Licht	559
6. A. Magnus. Über die Bestimmung spezifischer Wärmen . .	597
7. Martin Volke. Der Einfluß von Druckspannungen auf die elliptische Polarisation des total reflektierten Lichtes	609
8. Martin Knudsen. Thermischer Molekulardruck der Gase in Röhren und porösen Körpern	633

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: Würzburg, Pleieherring 8.

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger **Abdruck** der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

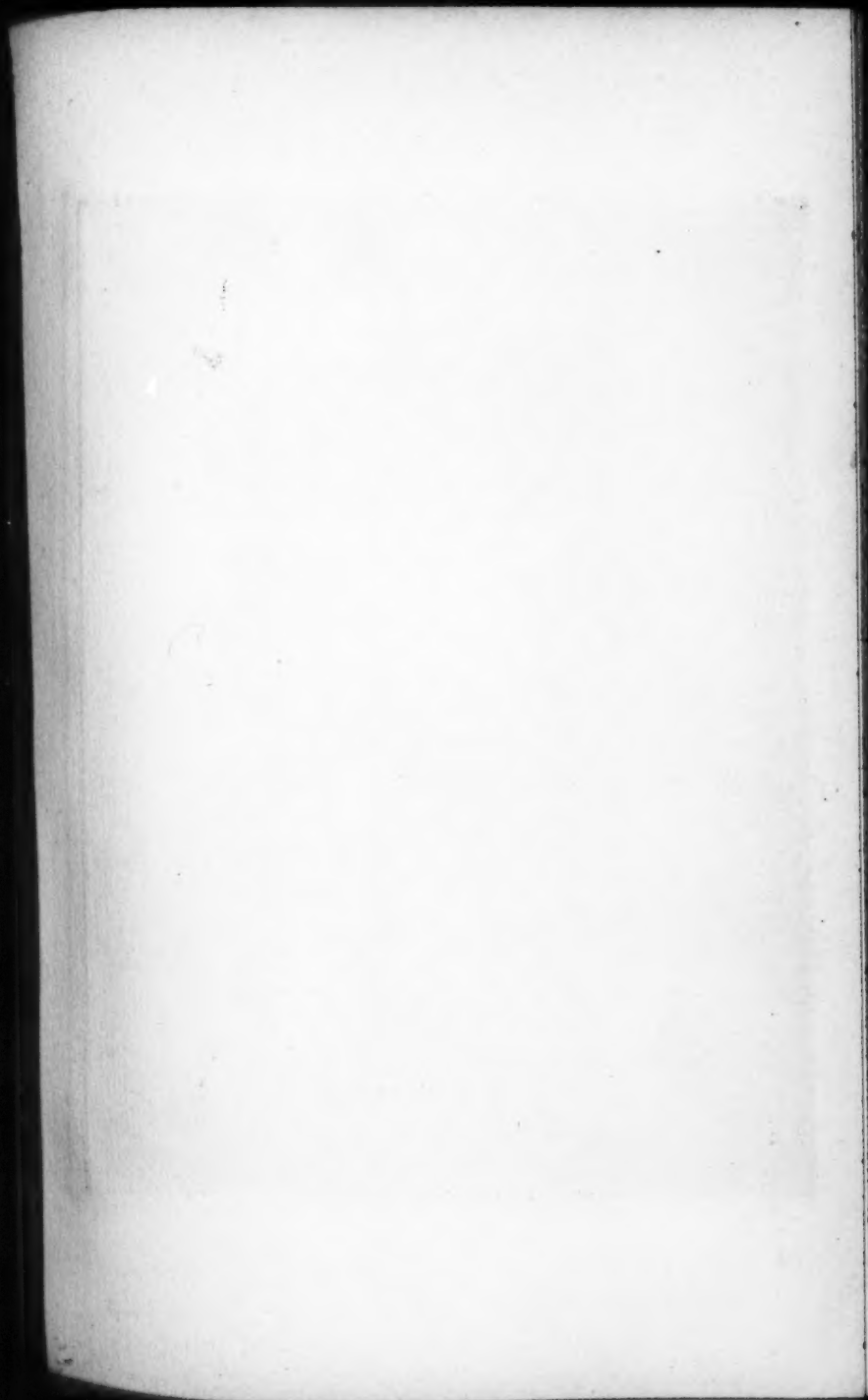
Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

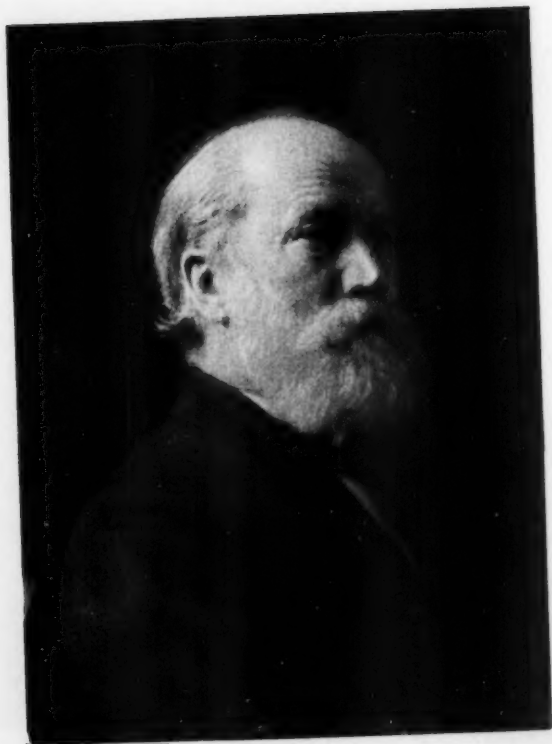
Ich bin jederzeit Käufer älterer Bände von „Poggendorffs Annalen der Physik“ und bitte namentlich um Angebote der Jahrgänge 1834—1864, auch in einzelnen Bänden und Heften.

Leipzig,
Dörrienstraße 16.

Johann Ambrosius Barth.







Kohlrausch

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 31.

Friedrich Kohlrausch †

Die Nachricht vom plötzlichen und unerwarteten Tode des Altmeisters der deutschen Physik, Friedrich Kohlrausch, traf seine Fachgenossen, als sie sich anschickten, die Feier seines siebenzigsten Geburtstages vorzubereiten. Es war ihm nicht beschieden, diesen Tag noch zu erleben, und seinen zurückgebliebenen Schülern und Freunden bleibt nur übrig, auf ihrer eigenen Bahn einzuhalten und einen Rückblick auf dies nunmehr vollendete Leben zu werfen.

Friedrich Kohlrausch wurde am 14. Oktober 1840 in Rinteln als Sohn von Rudolf Kohlrausch geboren, dessen berühmte mit Wilhelm Weber gemeinsam ausgeführte Messungen einen der Grundpfeiler der modernen elektromagnetischen Theorie errichtet haben. Friedrich Kohlrausch wandte sich ebenfalls der Physik zu und studierte in den Jahren 1858 bis 1862 in Erlangen und Göttingen, promovierte dort 1863 und wurde 1864 Dozent des Physikalischen Vereins in Frankfurt a/M. Er habilitierte sich in Göttingen, wo er das erste physikalische Praktikum organisiert hatte und wurde 1866 a. o. Professor. Er ging dann nacheinander als ordentlicher Professor 1870 ans Polytechnikum in

Zürich, 1871 nach Darmstadt, 1875 nach Würzburg. In Würzburg entfaltete er seine Haupttätigkeit, baute eins der ersten Physikalischen Institute, vollendete seine Hauptarbeiten über elektrische und magnetische Maßbestimmungen und sammelte einen Kreis ausgezeichneter Schüler um sich.

Der Würzburger Zeit hat er sich später immer gern erinnert und sich dort offenbar besonders wohl gefühlt. Einen Ruf an die Universität München lehnte er ab. Erst als im Jahre 1888 Kundt als Nachfolger von Helmholtz nach Berlin ging, folgte er einem Rufe nach Straßburg.

Im Jahre 1894 starb Kundt und Kohlrausch wurde als sein Nachfolger nach Berlin berufen. Seine Stellung zu dieser Berufung ist durch die Überzeugung bestimmt gewesen, daß die Anforderungen dieser Stelle die Kräfte eines einzelnen übersteigen. Da aber seine Forderung einer Teilung des Lehrauftrags auf Schwierigkeiten stieß, lehnte er den Ruf ab. In der Tat ist der Konflikt zwischen Lehr- und Forschertätigkeit, der den Universitätslehrer so häufig auf die Probe stellt, an den großen Universitäten besonders verschärft. Und Kohlrausch hat es mit seinen Pflichten immer besonders ernst genommen.

Einige Monate später wurde er abermals vor eine schwere Entscheidung gestellt. Das für die Physik unheilvolle Jahr 1894 entriß kurz nach dem Tode von Hertz und Kundt auch Helmholtz der Wissenschaft. Kohlrausch wurde die Stelle des Präsidenten der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt angetragen. Er

hat niemals ein Hehl daraus gemacht, daß seiner eigenen Neigung seine bisherige Tätigkeit besser entspräche, als die umfangreiche Verwaltung einer vielgliedrigen Anstalt. Er glaubte jedoch der Aufforderung, die Leitung der durch Helmholtz gegründeten Anstalt zu übernehmen, sich nicht entziehen zu dürfen. Im Jahre 1895 trat er sein neues Amt an, das er zehn Jahre lang mit aufopfernder Pflichttreue verwaltete. Die tiefe und strenge Auffassung, die er von seinem Amte hatte, gestattete ihm nicht sich das Leben leicht zu machen. Die große Zahl hervorragender Arbeiten, welche an der Reichsanstalt unter seiner Leitung ausgeführt sind, brachte es zugleich mit der Verwaltung der Anstalt mit sich, daß er sich eine außerordentlich umfangreiche Tätigkeit zumutete. Dabei waren seine Gesundheit zart und seine Nerven empfindlich. Nur durch eine sehr vorsichtige und geregelte Lebensweise, durch peinliche Ordnung und Zeiteinteilung gelang es seiner energischen Natur die bedeutende Arbeitsleistung zu bewältigen. Als nach fast zehnjähriger Arbeit seine Gesundheit zu wanken begann, als namentlich seine Sehkraft ermüdete, beschloß er sich von seinem Amte zurückzuziehen.

In dem idyllischen Marburg, der alten Heimat, hat Kohlrausch dann die letzten fünf Jahre seines Lebens zugebracht. Er widmete sich sogleich wieder wissenschaftlicher Arbeit, nahm alte Untersuchungen wieder auf und seine Gesundheit erfrischte sich in dieser ruhigen Tätigkeit so sehr, daß niemand das bevorstehende Ende erwarten konnte.

Wenn wir nun das Lebenswerk dieses bedeutenden Mannes betrachten, so finden wir sehr verschiedenartige, hervorragende Leistungen sowohl auf dem Gebiet der Forschung als der Organisation des Unterrichts. In wissenschaftlicher Arbeit ist Kohlrausch in erster Linie der Meister der messenden Physik. Seine Messung der elektrischen Leitfähigkeit verdünnter Elektrolyte, die ihn zu dem Gesetz der unabhängigen Wanderung der Ionen führte, die Bestimmung des Silberäquivalents, des Ohm sind als klassische Arbeiten längst anerkannt. Durch seine elektrolytischen Untersuchungen, die sich unmittelbar an die bahnbrechenden Arbeiten Hittorfs anschließen, ist er einer der Begründer der physikalischen Chemie geworden. Aber auch sonst hat er die Physik durch eine große Reihe von Arbeiten bereichert, die hauptsächlich zur Maßbestimmung dienen. Schon früh fand er die Methode der Widerstandsbestimmung durch induzierte Ströme und stellte für sie den bekannten Sinusinduktor zur Herstellung von Sinusströmen her. Später vereinfachte er sie zu der allbekannten mit Induktorwechselströmen und Telephon. Seine Messungen der Leitfähigkeit sind dann in dem Buche „Das Leitvermögen der Elektrolyte“ von Kohlrausch und Holborn, Leipzig 1898, zusammengestellt. Er veröffentlichte eine Reihe von Untersuchungen über die elastische Nachwirkung im Anschluß an die Boltzmannsche Theorie. Sehr bekannt ist sein Totalreflektometer zur Bestimmung des optischen Brechungsindex geworden. Besonders wichtig für erdmagnetische Messungen war das Lokalvariometer, dem er verschiedene

Formen, den verschiedenen Bedürfnissen entsprechend, gab. Auch eine sehr genaue Methode zur Messung der Wärmeleitfähigkeit hat er angegeben.

Sehr interessant und originell ist seine Theorie der Thermoelektrizität. Während die frühere Theorie den Sitz der thermoelektrischen Kraft ausschließlich in der Lötstelle sah, betrachtete Kohlrausch die Thermoelektrizität als eine Mitführung der Elektrizität durch die fortgeleitete Wärme. Die ältere Theorie suchte die Wärmeleitung zu vernachlässigen, während Kohlrausch den ganzen Vorgang mit ihr verknüpfte. Beide Theorien führen zu demselben Endergebnis, doch war die Auffassung von Kohlrausch für die Theorie der Thermoelektrizität von großer Bedeutung, namentlich da der sogenannte Thomseffekt keine neue Wirkung, sondern eine einfache Folge der Theorie ist.

Besonders wichtig ist eine von Kohlrausch und Heydweiller durchgeführte Untersuchung über die Leitfähigkeit reinsten Wassers. Durch Benutzung von Gefäßen, die lange mit Wasser in Berührung gewesen waren und die löslichen Bestandteile größtenteils abgegeben hatten, sowie durch Ausschluß der Luft gelang es den Forschern, ein außerordentlich reines Wasser zu erhalten, das einen ungewöhnlich hohen Temperaturkoeffizienten der galvanischen Leitfähigkeit zeigte. Dies war eine wichtige Bestätigung der Arrheniusschen Theorie der elektrolytischen Dissoziation.

Für den physikalischen Unterricht an den Hochschulen ist die Organisation des physikalischen Praktikums in Göttingen durch Kohlrausch bahnbrechend

gewesen. Nach diesem Muster sind die physikalischen Übungen wohl an allen Hochschulen eingerichtet. Der Leitfaden der praktischen Physik, der aus diesen Übungen entstanden ist, hat sich immer noch als bestes Lehrbuch erwiesen. Von ihm ist das Lehrbuch der praktischen Physik abgezweigt, das in der elften Auflage soeben erschienen ist und fast alle physikalischen Meßmethoden bis zu den neuesten auf dem Gebiete der Radioaktivität enthält. Daß dies für jeden Physiker unentbehrliche Handbuch nicht ein vielbändiges Werk geworden ist, sondern den ungeheuren Stoff in einen mäßigen Band zusammendrängt, ist eine besonders schwierige und originelle Leistung. Der Verfasser war sich bei der Abfassung der elften Auflage klar darüber, daß es die letzte sei, die er besorgen könne, und hat in der Vorrede von dem Werke, das er durch vierzig Jahre immer neu bearbeitet, Abschied genommen.

Für uns Zurückbleibende ist Kohlrausch das unvergängliche Muster des Forschers, der die exakten Meßmethoden als die wesentliche Unterlage der Physik ausbildet, in unserer Zeit besonders wertvoll, wo die ungeheure Fülle neuer Tatsachen Spekulationen hervorruft, welche die Wissenschaft zu überwuchern drohen.

Und so wollen auch wir Abschied nehmen von Friedrich Kohlrausch, der unbestechlich wahren und strengen wissenschaftlichen Persönlichkeit.

W. Wien.

**1. Untersuchungen
über die Beugung elektromagnetischer Wellen
an dielektrischen Zylindern;
von Clemens Schaefer und Felix Grossmann.¹⁾**

Einleitung.

Beugungsprobleme sind bisher fast ausschließlich auf Grund des Huyghensschen Prinzips in der Kirchhoffschen Formulierung behandelt worden. Aber obwohl dieser Satz an sich völlig streng ist, so kann er doch nur in einem einzigen Falle wirklich streng angewandt werden, nämlich dann, wenn das Licht sich *ungestört* ausbreitet, — und in diesem Falle bedarf man des Theorems nicht. Dies liegt daran, daß zu exakten Anwendungen des Satzes die Kenntnis von Größen gefordert wird, die erst angegeben werden können, wenn man die fertige Lösung bereits besitzt. Man ist also gezwungen, eine Reihe von — näherungsweise nach Ausweis der Erfahrung richtigen — Annahmen zu machen, die voraussichtlich das Resultat nicht stark beeinflussen können. So nimmt man z. B. hinter einem beugenden Schirme den Lichtvektor von vornherein gleich Null an, so setzt man ferner dafür in der Öffnung eines Beugungsschirmes den Wert, der ihm bei ungestörter Ausbreitung zukommen würde. Erstere Annahme ist nahezu erfüllt, wenn das Schirmmaterial vollkommen undurchlässig ist; die zweite Voraussetzung kann als nahezu richtig anerkannt werden, wenn die Dimensionen der beugenden Öffnung

1) Der theoretische Teil ist zum Teil bereits erschienen in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie (Mitteilung vom 21. Jan. 1909), woselbst auch einige experimentelle Resultate angegeben sind. Der experimentelle Teil der Arbeit ist ein Auszug aus der Breslauer Inaug.-Dissert. von Felix Grossmann, die auf meine Veranlassung ausgeführt wurde. Um Raum zu sparen und um das Ganze übersichtlicher gestalten zu können, sind beide Arbeiten hier vereinigt worden. Cl. Schaefer.

groß gegen die Wellenlängen sind. Zur fernereren Vereinfachung der Formeln beschränkt man sich auch auf kleine Beugungswinkel und nimmt die Schirme *als vollkommen schwarz* an.

Es muß als eine erstaunliche Leistung der Kirchhoffschen Theorie betrachtet werden, daß trotz der vom mathematischen Standpunkt aus ziemlich einschneidenden Einschränkungen im ganzen die Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment vortrefflich genannt werden muß. *Nur fallen natürlich alle diejenigen Erscheinungen aus dem Rahmen der Theorie heraus, in denen ein Materialeinfluß der Beugungsschirme beobachtet¹⁾ worden ist.* Denn da alle Stoffe von vornherein als *schwarz* betrachtet werden, können sie sich optisch in nichts mehr unterscheiden.

Die nämliche Bemerkung trifft auch die Untersuchung von Sommerfeld²⁾ und die sich daran anschließende von Schwarzschild³⁾; in diesen — im übrigen völlig strengen — Arbeiten wird durch die Annahme unendlich großer Leitfähigkeit, d. h. vollkommenen Reflexionsvermögens der Schirme, jeder Materialeinfluß a limine von der Theorie ausgeschlossen.

Dasselbe gilt von den kürzlich erschienenen Arbeiten von K. Aichi⁴⁾ und B. Sieger⁵⁾, in denen die Beugung elektromagnetischer Wellen an einem elliptischen Zylinder von unendlich großem Leitvermögen untersucht wird.

Im Gegensatze dazu haben sich folgende Probleme *ohne* die vereinfachende Annahme unendlich großer Leitfähigkeit streng behandeln lassen: Ebene polarisierte elektromagnetische Wellen fallen auf eine leitende Kugel [G. Mie⁶⁾] oder auf einen leitenden Zylinder [v. Ignatowsky⁷⁾, Seitz⁸⁾].

Die Lösung ergibt sich hier in Form unendlicher Reihen, die nur dann ausgewertet werden können, wenn das Verhältnis

1) Vgl. insbesondere: Du Bois und H. Rubens, Wied. Ann. **49**. p. 593. 1893.

2) A. Sommerfeld, Math. Theorie der Diffraktion, Math. Ann. **47**. p. 317. 1895.

3) K. Schwarzschild, Math. Ann. **55**. p. 177. 1902.

4) K. Aichi, Proc. Tokyo Math. Phys. Soc. (2) **4**. p. 966. 1908.

5) B. Sieger, Ann. d. Phys. **27**. p. 626. 1908.

6) G. Mie, Ann. d. Phys. **25**. p. 377. 1908.

7) W. v. Ignatowsky, Ann. d. Phys. **18**. p. 495; 1905.

8) W. Seitz, Ann. d. Phys. **16**. p. 746. 1905; **19**. p. 554. 1906.

ρ/λ (ρ = Kugel- oder Zylinderradius, λ = Wellenlänge) klein, höchstens etwa $1/3$ ist. In diesem letzteren Umstande ist es begründet, daß experimentelle Untersuchungen dieser exakt berechenbaren Fälle äußerst erschwert sind. Denn für Licht- und Wärmewellen läßt sich ein hinreichend kleines Verhältnis ρ/λ kaum realisieren; für elektrische Wellen jedoch, wo diese Schwierigkeit in Fortfall kommt, liegen die Verhältnisse insofern ungünstig, als hier die Leitfähigkeit praktisch in den allermeisten Fällen als *unendlich* betrachtet werden darf. Solange nicht die Messungen mit elektrischen Wellen eine ungeheure Verfeinerung erfahren haben, ist an die Konstatierung eines Materialeinflusses bei der Beugung an einem *einzelnen* Zylinder infolge der *endlichen*, von Stoff zu Stoff *verschiedenen* Leitfähigkeit nicht zu denken.

Unter diesen Umständen schien es von Interesse, solche Fälle zu untersuchen, bei denen der *Materialeinfluß* auch im Gebiete der elektrischen Wellen noch gut nachweisbar ist. Es kommt hier vornehmlich in Betracht die Beugung elektromagnetischer Wellen an einem *dielektrischen Zylinder* und einer *dielektrischen Kugel*. Mit dem ersteren Problem beschäftigt sich die folgende Abhandlung, deren wesentliche Resultate auf der 80. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte in Cöln 1908 vorgetragen wurden. Fast gleichzeitig wurde das zweite Problem von P. Debye¹⁾ in Angriff genommen. Die vorliegende Untersuchung hat naturgemäß mit der Debyeschen manche Berührungspunkte, von der sie jedoch völlig unabhängig ist.

I. Theoretischer Teil.

Es möge die Achse des dielektrischen Zylinders, dessen Radius ρ sei, mit der z -Achse zusammenfallen, deren positive Richtung in Fig. 1 nach vorne aus der Zeichnungsebene herausragt; die positive x -Achse zeigt nach rechts, die positive y -Achse nach oben.

Parallel der x -Achse, und zwar in Richtung der abnehmenden x (Pfeilrichtung in Fig. 1), falle ein ebener polarisierter Wellenzug ein. Hier sind zwei Fälle möglich: Ent-

1) P. Debye, Münchener Inaug.-Dissert. 1908; Ann. d. Phys. 30. p. 57. 1909.

weder ist die *elektrische Kraft* der einfallenden Welle parallel der Zylinderachse, oder aber *senkrecht* zu letzterer orientiert; der erstere Fall ist experimentell der interessantere, weshalb im zweiten Teile der Arbeit nur er dem Experiment unter-

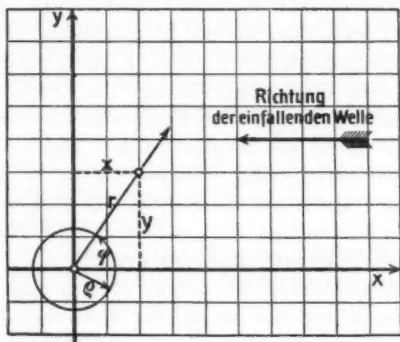


Fig. 1.

worfen wurde. Dennoch schien es aus besonderen Gründen, die später hervortreten werden, zweckmäßig, im theoretischen Teile *beide* Fälle zu behandeln.

A. Die elektrische Kraft ist parallel der Zylinderachse.

Wir transformieren zunächst die Maxwellschen Gleichungen auf Zylinderkoordinaten (r, φ, z) , die mit den kartesischen folgendermaßen zusammenhängen:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z.$$

Berücksichtigt man außerdem, daß gemäß den Bedingungen dieses Falles A die elektrischen Kraftkomponenten \mathcal{E}_r und \mathcal{E}_φ nicht auftreten können, sowie daß alle Feldgrößen von z unabhängig sein müssen, da der Zylinder als unendlich lang vorausgesetzt wird, so erhalten wir in der üblichen Bezeichnungsweise die Maxwellschen Gleichungen in folgender Gestalt:

$$(1) \quad \begin{cases} a) & \frac{s}{c} \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \mathcal{H}_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{H}_r}{\partial \varphi}, \\ b) & \frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathcal{H}_r}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial \varphi}, \\ c) & \frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathcal{H}_\varphi}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial r}. \end{cases}$$

Die drei hier fortgefallenen Gleichungen, die \mathfrak{E}_r , \mathfrak{E}_φ , \mathfrak{H}_z enthalten, treten in dem Falle B auf.

Dazu treten noch die Grenzbedingungen der Maxwell'schen Theorie, daß die tangentiellen Komponenten der elektrischen und magnetischen Kraft beim Übergang von einem Medium zum anderen, d. h. an der Oberfläche des Zylinders, stetig bleiben müssen. Bezeichnen wir die auf den Außenraum bezüglichen Größen durch den Index 1, die dem Innenraum entsprechenden mit 2, so folgt demgemäß:

$$(2) \quad \begin{cases} a) & (\mathfrak{E}_z)_1 = (\mathfrak{E}_z)_2, \\ b) & (\mathfrak{H}_\varphi)_1 = (\mathfrak{H}_\varphi)_2. \end{cases}$$

Statt letzterer Gleichung hat man auch, wie Differentiation nach t und Benutzung von (1c) ergibt:

$$(2c) \quad \frac{1}{\mu_1} \left(\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial r} \right)_1 = \frac{1}{\mu_2} \left(\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial r} \right)_2.$$

Dazu tritt noch eine Bedingung hinzu, die aussagt, daß in unendlicher Entfernung vom Zylinder ($r = \infty$) die durch denselben hervorgerufene Störung unmerklich geworden ist, d. h. daß wir in unendlich großer Entfernung wieder eine ebene Welle haben. Das gibt im Zusammenhange mit den Bedingungen der Aufgabe die Gleichung:

$$(2d) \quad (\mathfrak{E}_z)_{r=\infty} = e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(ct+x)} = e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(ct+r \cos \varphi)}.$$

Aus Gleichung (1) erhält man in der bekannten Weise die folgende für \mathfrak{E} (wie wir jetzt der Einfachheit halber für \mathfrak{E}_z schreiben wollen):

$$(3) \quad \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial \varphi^2}.$$

Um zu einer Integration von (3) zu gelangen, setzen wir, unter Berücksichtigung des Umstandes, daß wir rein periodische Vorgänge betrachten,

$$(4) \quad \mathfrak{E} = e^{i n t} \sum_m^{0, \infty} Q_m \cdot \cos m \varphi,$$

wo Q_m eine Funktion von r allein bedeutet. Setzt man (4) in (3) ein, so folgt für Q_m die gewöhnliche Differentialgleichung:

$$(5) \quad \frac{d^2 Q_m}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d Q_m}{dr} + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) Q_m = 0,$$

wo k^2 eine Abkürzung von der Bedeutung

$$\frac{\varepsilon \mu n^2}{c^2} = \frac{4\pi^2 \varepsilon \mu}{\lambda^2}$$

ist. Nehmen wir als Außenraum das Vakuum, für den Innenraum ein nicht magnetisierbares Medium mit der Dielektrizitätskonstanten ε , so folgt für den Außenraum:

$$k_1^2 = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} = \frac{n^2}{c^2},$$

für den Innenraum:

$$k_2^2 = \frac{4\pi^2 \varepsilon}{\lambda^2} = \frac{n^2 \varepsilon}{c^2}.$$

Gleichung (5) ist die Besselsche Differentialgleichung, deren Integrale die Besselschen Funktionen erster und zweiter Art vom Argument kr sind, die wir mit $J_m(kr)$ und $Q_m(kr)$ bezeichnen. Statt Q_m wollen wir eine Funktion K_m einführen, für die Tabellen vorliegen; ihr Zusammenhang ist durch die Gleichung gegeben:

$$Q_m = K_m - \frac{i\pi}{2} J_m.$$

Unter J_m und K_m verstehen wir folgende Reihen:

$$J_m(x) = \frac{x^m}{2 \cdot 4 \dots 2m} \left\{ 1 - \frac{x^2}{2(2m+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(2m+2)(2m+4)} \dots \right\},$$

$$\begin{aligned} K_m(x)^1) &= J_m(x) \cdot \log \frac{2}{\gamma x} + \left(1 + \frac{1}{2} + \dots \frac{1}{m} \right) J_m(x) \\ &\quad + \frac{m!}{2} \sum_s^{0, m-1} \frac{1}{m-s} \left(\frac{2}{x} \right)^{m-s} \cdot \frac{J_s(x)}{s!} \\ &\quad + \sum_s^{0, \infty} (-1)^s \frac{m+2s}{s(m+s)} J_{m+2s}(x). \end{aligned}$$

Sind J_0, J'_0, K_0, K'_0 (wofür Tabellen vorliegen) bekannt, so können beliebig hohe Ordnungen durch einfache Rekursionsformeln berechnet werden.²⁾ Für sehr große Werte des Argu-

1) $\log \gamma = 0,5772 \dots$, die sogen. Mascheronische Konstante.

2) Vgl. z. B. Gray and Matthews, Treatise on Bessel functions, p. 13, Gleichungen (16) bis (20).

ments (mit beträchtlicher Annäherung schon für $x = 5$) gelten die „asymptotischen“ Darstellungen:

$$(6) \quad J_m(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left\{ \frac{2m+1}{4} \pi - x \right\},$$

$$(7) \quad Q_m(x) = K_m(x) - \frac{i\pi}{2} J_m(x) = -i^{m+1} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{i(\pi/4 - x)}.$$

Speziell folgt aus (7):

$$(7a) \quad Q_m(x) = i^m Q_0(x).$$

Das allgemeine Integral von (5) erhält man daher in der Form:

$$(8) \quad b_m J_m(kr) + a_m \left\{ K_m(kr) - \frac{i\pi}{2} J_m(kr) \right\},$$

bezeichnen wir die Werte $k_1 r$ durch p_1 (Außenraum), $k_2 r$ mit p_2 (Innenraum), so folgt aus (6) und (4) für den Außenraum:

$$(9a) \quad \mathfrak{E}_1 = e^{int} \sum_m^{0, \infty} \left[b_m J_m(p_1) + a_m \left\{ K_m(p_1) - \frac{i\pi}{2} J_m(p_1) \right\} \right] \cos m\varphi,$$

für den Innenraum:

$$(9b) \quad \mathfrak{E}_2 = e^{int} \sum_m^{0, \infty} \left[b'_m J_m(p_2) + a'_m \left\{ K_m(p_2) - \frac{i\pi}{2} J_m(p_2) \right\} \right] \cos m\varphi.$$

Die Koeffizienten a_m , b_m , a'_m , b'_m sind durch die Grenzbedingungen (2a), (2c), (2d) bestimmbar. Man erhält durch einfache Rechnungen: $b_0 = 1$; $b_m = 2i^m$; ferner alle $a'_m = 0$; endlich erhält man für die für uns wichtigsten Koeffizienten a_m folgende Gleichung:

$$(10) \quad \frac{2i^m}{a_m} = \frac{\frac{k_1}{k_2} K_m'(\pi_1) - \frac{J_m'(\pi_2)}{J_m(\pi_2)} K_m(\pi_1)}{J_m(\pi_1) \frac{J_m'(\pi_2)}{J_m(\pi_2)} - \frac{k_1}{k_2} J_m'(\pi_1)} + \frac{i\pi}{2};$$

π_1 und π_2 sind die Werte von p_1 und p_2 für $r = \varrho$ (an der Zylinderoberfläche). Für $m = 0$ ist der Faktor 2 auf der linken Seite zu streichen. Eine ähnliche Gleichung erhält man auch für die Koeffizienten b'_m , die uns im folgenden jedoch nicht interessieren. Wir erhalten also endgültig:

$$(11) \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E}_1 &= e^{int} \left[\sum_m^{0, \infty} a_m \left\{ K_m(p_1) - \frac{i\pi}{2} J_m(p_1) \right\} \cos m\varphi \right. \\ &\quad \left. + J_0(p_1) + \sum_m^{1, \infty} 2im J_m(p_1) \cos m\varphi \right] \\ &= e^{int} \left[\sum_m^{0, \infty} a_m \left\{ K_m(p_1) - \frac{i\pi}{2} J_m(p_1) \right\} \cos m\varphi + e^{ip_1 \cos \varphi} \right]^{1)} \end{aligned} \right.$$

Diese Reihen sind in dem Falle, daß ϱ/λ klein ist, gut konvergent, so daß man sich auf die ersten Glieder derselben beschränken darf; die komplexen Ausdrücke der Gleichung (11) sind natürlich so zu verstehen, daß die reellen Teile zu nehmen sind. Man kann demgemäß \mathfrak{E}_1 stets auf die Form bringen:

$$(12) \quad \mathfrak{E}_1 = A \cos nt + B \sin nt;$$

bei den Messungen, auf die ich weiter unten zurückkomme, wird stets der seitliche Mittelwert von \mathfrak{E}^2 , nämlich

$$\frac{1}{T} \int_0^T \mathfrak{E}^2 dt = \overline{\mathfrak{E}^2}$$

gemessen, wo T eine volle Periode bedeutet. Nach (12) ist dann einfach:

$$(12a) \quad \overline{\mathfrak{E}^2} = \frac{A^2 + B^2}{2}.$$

Dies werden wir im folgenden benutzen.

Wir werfen noch einen Blick auf die Gleichung (10), die die Koeffizienten der Reihe (11) definiert. Man erkennt, daß die a_m nur abhängen von den Größen

$$\pi_1 = \frac{2\pi\varrho}{\lambda} \quad \text{und} \quad \pi_2 = \frac{2\pi\varrho\sqrt{\varepsilon}}{\lambda},$$

d. h. nur von der Größe der Dielektrizitätskonstante ε und dem Verhältnis ϱ/λ , während ϱ und λ für sich nicht in (10) vorkommen. Halten wir daher das Material, aus dem der Zylinder besteht, fest, so ist die einzige Variable ϱ/λ . Darin ist für die ganze Erscheinung nun ein *Ähnlichkeitssatz* aus-

1) Vgl. dafür z. B. Gray and Matthews, l. c. p. 18. Gl. (39) ff.

gesprochen: Die Koeffizienten a_m bleiben dieselben, wenn Zylinderradius und Wellenlänge im nämlichen Verhältnis geändert werden. Im folgenden werden wir die Konsequenzen dieses Satzes für die Erscheinungen hervorheben.

Drei Fälle sind es nun namentlich, welche für eine experimentelle Untersuchung ganz besonders in Betracht kommen, und die daher hier näher diskutiert werden sollen, nämlich die Energieverhältnisse vor dem Zylinder ($\varphi = 0$), hinter demselben ($\varphi = \pi$) und seitlich von ihm ($\varphi = \pi/2$).

Bevor wir zur Untersuchung dieser Fälle übergehen, wollen wir erst den Gleichungen (11) eine für die Diskussion geeignetere Gestalt geben.

Gehen wir nämlich mit dem Meßinstrument (das uns \mathcal{E}^2 anzeigen soll) nicht allzu nahe an die Oberfläche des Zylinders heran — dies verbietet sich in der Tat aus experimentellen, später genauer zu erwähnenden Gründen¹⁾ —, d. h. geben wir p_1 nicht allzu kleine Werte, so dürfen wir für die Besselschen Funktionen Q_m mit großer Annäherung die asymptotischen Darstellungen nach (7) und (7a) benutzen. Wir erhalten dann statt (11), wenn wir uns gleichzeitig auf die drei ersten Glieder beschränken, was hinreichende Kleinheit von ϱ/λ zur Voraussetzung hat:

$$(13) \quad \mathcal{E}_1 = e^{i n t} \{ [a_0 + i a_1 \cos \varphi - a_2 \cos 2 \varphi] Q_0(p_1) + e^{i p_1 \cos \varphi} \}.$$

Setzen wir hierin noch:

$$a_m = \alpha_m + i \beta_m,$$

$$Q_0(p_1) = -i \sqrt{\frac{2 p_1}{\pi}} e^{i \left(\frac{\pi}{4} - p_1 \right)},$$

so folgt bei Beschränkung auf den reellen Teil:

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= \cos [n t + p_1 \cos \varphi] \\ &+ \sqrt{\frac{\pi}{2 p_1}} \{ A_\varphi \sin (n t + \psi) + B_\varphi \cos (n t + \psi) \}, \end{aligned} \right.$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} A_\varphi &= \alpha_0 - \beta_1 \cos \varphi - \alpha_2 \cos 2 \varphi, \\ B_\varphi &= \beta_0 + \alpha_1 \cos \varphi - \beta_2 \cos 2 \varphi, \\ \psi &= \pi/4 - p_1. \end{aligned} \right.$$

1) Vgl. weiter unten p. 493.

Bringt man (14) auf die Form von (12), so folgt:

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E}_1 &= \cos nt \left[\cos(p_1 \cos \varphi) + \sqrt{\frac{\pi}{2p_1}} (A_\varphi \sin \psi + B_\varphi \cos \psi) \right] \\ &+ \sin nt \left[-\sin(p_1 \cos \varphi) + \sqrt{\frac{\pi}{2p_1}} (A_\varphi \cos \psi - B_\varphi \sin \psi) \right]. \end{aligned} \right.$$

Spezialisieren wir dies *zunächst für den Fall* $\varphi = 0$, d. h. für die Punkte der x -Achse *vor* dem Zylinder; wir erhalten nach (15) und (16) den Wert von \mathfrak{E} , indem wir dort $\cos \varphi = 1$ setzen; die entsprechenden Werte von A_φ und B_φ wollen wir mit A_0 und B_0 bezeichnen. So folgt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_{\varphi=0} &= \cos nt \left[\cos p_1 + \sqrt{\frac{\pi}{2p_1}} (A_0 \sin \psi + B_0 \cos \psi) \right] \\ &+ \sin nt \left[-\sin p_1 + \sqrt{\frac{\pi}{2p_1}} (A_0 \cos \psi - B_0 \sin \psi) \right]. \end{aligned}$$

Nach (12a) erhalten wir für den der Messung zugänglichen Wert $\overline{\mathfrak{E}_1^2}$:

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} \overline{\mathfrak{E}_1^2} &= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\pi}{2p_1} (A_0^2 + B_0^2) \right. \\ &\left. + 2 \sqrt{\frac{\pi}{2p_1}} \{-A_0 \sin(2p_1 - \pi/4) + B_0 \cos(2p_1 - \pi/4)\} \right]. \end{aligned} \right.$$

Gleichung (17) besagt, daß sich vor dem Zylinder *Interferenzstreifen* ausbilden, deren Intensität mit wachsender Entfernung von der Zylinderachse abnimmt. Die Lage der Maxima und Minima hängt ab von der Größe der Koeffizienten A_0 und B_0 ; diese aber sind lediglich Funktionen von s und ϱ/λ . Daraus folgt: Die Interferenzstreifen verschieben sich sowohl, wenn bei konstantem s sich das Verhältnis ϱ/λ ändert, als auch, wenn bei festgehaltenen Dimensionen ϱ und λ *das Material des Zylinders variiert wird*. Letzteres Ergebnis ist es namentlich, welches über die Resultate der alten Beugungstheorie hinausreicht. Eine ähnliche Bemerkung gilt für die *Intensitäten* der Interferenzstreifen; auch sie hängen von denselben Größen ab. — Der Abstand zweier aufeinanderfolgender Maxima oder Minima beträgt $\lambda/2$. Endlich lehrt das Auftreten des stets positiven Gliedes $\pi/2p_1 (A_0^2 + B_0^2)$ in Gleichung (17), daß die Intensität der Interferenzen „*unsymmetrisch*“ in bezug auf die „normale“ Intensität (d. h. diejenige ohne Zylinder) ist.

In der Fig. 2 sind für einen bestimmten Fall, der realisiert werden kann (und worden ist¹⁾), die berechneten Interferenzerscheinungen wiedergegeben; dabei ist angenommen:

$$\varepsilon = 81; \quad \lambda = 24 \text{ cm};$$

$$\varrho_I = 0,15 \text{ cm}; \quad \varrho_{II} = 0,34 \text{ cm}; \quad \varrho_{III} = 1,21 \text{ cm}.$$

Als Abszissen sind in Fig. 2 aufgetragen die Entfernungen r von der Zylinderachse in Zentimetern; als Ordinaten sind benutzt die Intensitäten in Prozenten der „freien“ Strahlung. Man erkennt deutlich die Verschiebung der Maxima und Minima für verschiedenes ϱ/λ , die Intensitätsunterschiede der einzelnen Kurven, sowie ihre Asymmetrie bezüglich der Ordinate 100 der „freien“ Intensität.

Für dieselben Werte ϱ/λ sind auch unter Zugrundelegung des Wertes $\varepsilon = 25$ die Interferenzen berechnet worden; es ist bemerkenswert, daß die von der Theorie geforderte Abhängigkeit der Lage der Interferenzstreifen vom Material zwar zum Ausdruck kommt, aber *relativ sehr klein* ist. Die Verschiebung

beträgt trotz der erheblichen Differenz in den Dielektrizitätskonstanten nur etwa $\frac{1}{100} \lambda$. Dagegen ist allerdings der Materialeinfluß in den Intensitätsverhältnissen der Interferenzen deutlich zu erkennen und bequem nachweisbar.

Wir gehen jetzt über zur Untersuchung des Zustandes *süßlich vom Zylinder*, d. h. für $\varphi = \pi/2$.

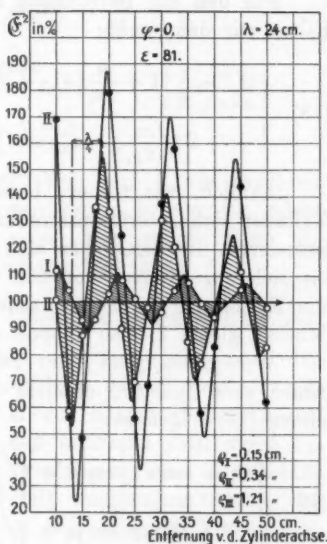


Fig. 2.

1) Vgl. weiter unten p. 493.

Für diesen Fall liefert uns Gleichung (16):

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_1 = \cos n t \left[1 + \sqrt{\frac{\pi}{2p_1}} (A_{\pi/2} \sin \psi + B_{\pi/2} \cos \psi) \right] \\ + \sin n t \left[\sqrt{\frac{\pi}{2p_1}} (A_{\pi/2} \cos \psi - B_{\pi/2} \sin \psi) \right]. \end{aligned}$$

Hierin sind $A_{\pi/2}$ und $B_{\pi/2}$ die Werte von A_φ und B_φ für $\varphi = \pi/2$.

Für den der Berechnung zugänglichen Wert von $\overline{\mathfrak{E}_1^2}$ erhalten wir demgemäß:

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} \overline{\mathfrak{E}_1^2} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\pi}{2p_1} (A_{\pi/2}^2 + B_{\pi/2}^2) \right. \\ \left. + 2 \sqrt{\frac{\pi}{2p_1}} \{-A_{\pi/2} \sin(p_1 - \pi/4) + B_{\pi/2} \cos(p_1 - \pi/4)\} \right]. \end{aligned} \right.$$

Ähnlich, wie vorher, besagt (18), daß auch seitlich vom Zylinder sich Interferenzstreifen ausbilden; abgesehen von der geänderten Intensität der Maxima und Minima unterscheiden sie sich nur dadurch von den vorhin besprochenen, daß hier die Entfernung je zweier aufeinanderfolgender Maxima oder Minima gleich λ , also doppelt so groß wie im ersten Falle ist.

Wir gehen jetzt über zur Untersuchung des Zustandes *hinter dem Zylinder*, nämlich für $\varphi = \pi$. Hier ergibt Gleichung (16) folgendes:

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E}_1 = \cos n t \left[\cos p_1 + \sqrt{\frac{\pi}{2p_1}} (A_\pi \sin \psi + B_\pi \cos \psi) \right] \\ + \sin n t \left[\sin p_1 + \sqrt{\frac{\pi}{2p_1}} (A_\pi \cos \psi - B_\pi \sin \psi) \right]; \end{aligned} \right.$$

A_π und B_π sind die Werte, die man aus (15) erhält, wenn dort $\varphi = \pi$ gesetzt wird. Nach (12a) erhalten wir daraus:

$$\begin{aligned} \overline{\mathfrak{E}_1^2} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\pi}{2p_1} (A_\pi^2 + B_\pi^2) \right. \\ \left. + 2 \sqrt{\frac{\pi}{2p_1}} \{A_\pi \sin(p_1 + \psi) + B_\pi \cos(p_1 + \psi)\} \right], \end{aligned}$$

oder, da nach (15) $\psi = \pi/4 - p_1$ ist:

$$(20) \quad \overline{\mathfrak{E}_1^2} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\pi}{2p_1} (A_\pi^2 + B_\pi^2) + \sqrt{\frac{\pi}{p_1}} (A_\pi + B_\pi) \right].$$

Führt man darin noch den Wert $2\pi r/\lambda$ für p_1 ein, so folgt endlich:

$$(20a) \quad \overline{\mathcal{E}}_1^2 = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\lambda}{4r} (A_\pi^2 + B_\pi^2) + \sqrt{\frac{\lambda}{2r}} (A_\pi + B_\pi) \right].$$

Man erkennt sofort, daß *hinter* dem Zylinder keine Interferenzstreifen zustande kommen; vielmehr ergibt die Diskussion von (20a) folgendes Verhalten: der Ausdruck

$$\frac{\lambda}{4} (A_\pi^2 + B_\pi^2)$$

ist *stets positiv*, während die Größe

$$\sqrt{\frac{\lambda}{2r}} (A_\pi + B_\pi)$$

dies keineswegs zu sein braucht. Man muß ferner beachten, daß (20a) *nur für den Außenraum gilt*, d. h. nur für solche Werte von r , die größer als ϱ sind. Man ersieht dann unmittelbar, daß folgende Möglichkeiten vorliegen:

I. $\sqrt{\frac{\lambda}{2r}} (A_\pi + B_\pi)$ ist *positiv*. Dann ist der ganze Klammerausdruck positiv und größer als 1. Berücksichtigt man, daß bei „freier“ Strahlung die Ausdrücke mit A_π und B_π gar nicht vorhanden sind, d. h. daß der Klammerausdruck den Wert 1 hat, so erkennt man, daß *in diesem Falle durch das Einbringen des Zylinders in den Strahlengang eine Verstärkung der Strahlung erzeugt wird*, die mit wachsendem r sich der Null nähert. Diese Vermehrung der Energie hinter dem Zylinder kommt durch eine eigentümliche Verteilung der Energie um den Zylinder herum zustande, auf die wir später werden einzugehen haben.

Diese Erscheinungsform werde im folgenden Typus (oder Charakter) I genannt.

II. $\sqrt{\frac{\lambda}{2r}} (A_\pi + B_\pi)$ ist *negativ*.

Wir schreiben nun (20a) in folgender Form:

$$(20b) \quad \overline{\mathcal{E}}_1^2 = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\lambda}{\sqrt{r}} \left\{ \frac{\lambda}{4\sqrt{r}} (A_\pi^2 + B_\pi^2) + \sqrt{\frac{\lambda}{2}} (A_\pi + B_\pi) \right\} \right].$$

Es kann dann der Fall eintreten, daß der absolute Betrag des als negativ vorausgesetzten Ausdruckes

$$\sqrt{\frac{\lambda}{2}}(A_{\pi} + B_{\pi})$$

so groß ist, daß bereits für $r = \rho$ (d. h. den kleinsten Wert von r , für den Gleichung (20b) noch gelten kann) die Ungleichung erfüllt ist:

$$\frac{\lambda}{4\sqrt{r}}(A_{\pi}^2 + B_{\pi}^2) < \left| \sqrt{\frac{\lambda}{2}}(A_{\pi} + B_{\pi}) \right|.$$

Diese Ungleichung ist dann *a fortiori* für alle größeren Werte von r gültig, mit anderen Worten: die Summe

$$\frac{\lambda}{4r}(A_{\pi}^2 + B_{\pi}^2) + \sqrt{\frac{\lambda}{2r}}(A_{\pi} + B_{\pi})$$

ist für den ganzen Außenraum negativ und nähert sich für wachsendes r asymptotisch der Null.

Der Klammerausdruck in (20b) ist also *stets kleiner als 1*, was verglichen mit dem Werte für freie Strahlung ergibt: *Hinter dem Zylinder entsteht jetzt eine Schwächung („Schatten“), die asymptotisch verschwindet.*

Jedoch ist folgendes zu beachten: Während im Falle I die Verstärkung mit wachsendem r *stets* abnimmt, gilt dies für die hier auftretende Schwächung erst von einem bestimmten Werte von r an; denn im allgemeinen hat der Ausdruck

$$1 + \frac{\lambda}{4r}(A_{\pi}^2 + B_{\pi}^2) + \sqrt{\frac{\lambda}{2r}}(A_{\pi} + B_{\pi})$$

ein *Minimum*, in welchem der „Schatten“ am tiefsten ist. Von da aber nimmt er mit wachsendem r ab. Die Lage des Minimums findet man leicht zu:

$$(21) \quad r_{\min.} = \frac{\lambda}{2} \left(\frac{A_{\pi}^2 + B_{\pi}^2}{A_{\pi} + B_{\pi}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Es kann sich ereignen, daß das so berechnete $r_{\min.} < \rho$ ist. Das bedeutet dann natürlich, daß *gar kein* Minimum auftritt, sondern die Schwächung *ständig* mit wachsendem r abnimmt.¹⁾

1) Es ist jedoch hier — und überall dort, wo so kleine Werte von r betrachtet werden — wohl zu beachten, daß dann die asymptotischen

Zusammenfassend können wir also sagen, daß der Typus II eine Schirmwirkung des Zylinders darstellt; alle Punkte der x -Achse hinter dem Zylinder erhalten eine kleinere Energie als im Falle freier Strahlung.

III. $\sqrt{\frac{\lambda}{2}}(A_\pi + B_\pi)$ sei wieder negativ; doch sei für $r = r_0$, d. h. für die Oberfläche des Zylinders

$$\frac{\lambda}{4\sqrt{r}}(A_\pi^2 + B_\pi^2) > \left| \sqrt{\frac{\lambda}{2}}(A_\pi + B_\pi) \right|.$$

Der auf der linken Seite stehende Ausdruck wird nun mit wachsendem r immer kleiner; es gibt also ein bestimmtes r_0 , für welches die Ungleichung in eine Gleichung übergeht. Für alle $r > r_0$ gilt die Ungleichung im umgekehrten Sinne. Wir folgern also:

1. für $r < r_0$ ist der Klammerausdruck (20b) größer als 1; das bedeutet also eine Verstärkung hinter dem Zylinder;
2. für $r = r_0$ ist der Klammerausdruck (20b) gleich 1; in diesem Punkte herrscht also die ursprüngliche Helligkeit;
3. für $r > r_0$ ist der fragliche Ausdruck kleiner als 1; hier tritt ein „Schatten“ auf.

Der Punkt $r = r_0$ heiße der „Indifferenzpunkt“. Seine Lage erhält man, indem man die Gleichung

$$\frac{\lambda}{4\sqrt{r_0}}(A_\pi^2 + B_\pi^2) + \sqrt{\frac{\lambda}{2}}(A_\pi + B_\pi) = 0$$

nach r_0 auflöst, es folgt:

$$(22) \quad r_0 = \frac{\lambda}{8} \left(\frac{A_\pi^2 + B_\pi^2}{A_\pi + B_\pi} \right)^2.$$

Die Kurven vom Typus III stellen gewissermaßen die Verbindung her zwischen den Kurven vom Charakter I und II.

Man erkennt den Verlauf am besten aus der graphischen Darstellung in Fig. 3.

Darstellungen der Besselschen Funktionen nicht mehr anwendbar sind und daher die obige Betrachtung streng genommen nicht mehr gilt; man muß dann auf die allgemeinen Formeln zurückgreifen. Im Texte ist die vereinfachte Darstellung der Kürze halber gewählt worden.

1) Vgl. vorstehende Anmerkung.

Dort sind für eine Reihe von Werten ($\lambda = 58$ cm, $\varepsilon = 81$) die Intensitätskurven hinter dem Zylinder gezeichnet, und zwar sind als Ordinaten die Werte von \mathcal{C}^2 in Proz. der freien Strahlung aufgetragen; als Abszissen die Werte von r , d. h. die Entfernungen hinter dem Zylinder. Man sieht, daß für $r = 0,15$ cm, $0,30$ cm, $0,34$ cm, $0,44$ cm und $0,55$ cm die Kurven den Typus I besitzen, und zwar steigt die Verstärkung in der

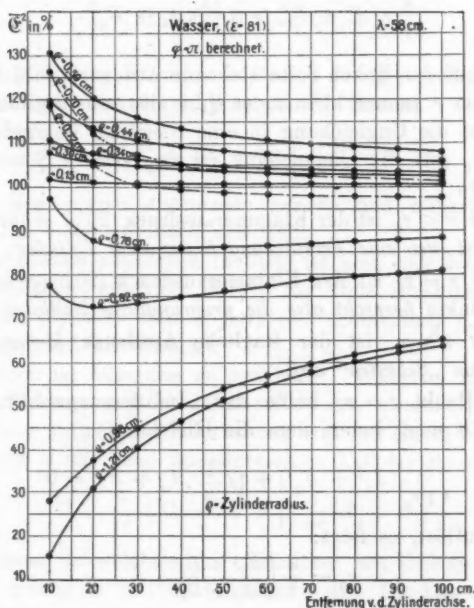


Fig. 3.

angegebenen Reihenfolge; ebenso gehört auch $r = 0,70$ cm noch dem ersten Typus an; die betreffende Kurve liegt jedoch wieder *unterhalb* derjenigen für $0,55$ cm. Die Verstärkung passiert also bei wachsendem ρ ein Maximum.

Wenn man sich auf sehr dünne Zylinder beschränkt, so daß die Reihe (11) mit dem ersten Gliede abgebrochen werden darf, kann man sich direkt an den Formeln von diesem Ver-

lauf der Erscheinung überzeugen, ohne erst numerische Rechnungen durchzuführen. Eine leichte Rechnung ergibt:

$$\mathfrak{E}_1 = e^{i(nt + p_1 \cos \varphi)} + \frac{q^2 \pi^2}{r^{1/2} \lambda^{3/2}} (s - 1) e^{i(nt - p_1 - \pi/4)},$$

woraus für $\varphi = \pi$ unter Abspaltung des reellen Teiles folgt:

$$\mathfrak{E}_1 = \cos(nt - p_1) + \frac{q^2 \pi^2}{r^{1/2} \lambda^{3/2}} (s - 1) \cos(nt - p_1 - \pi/4).^1)$$

Unter konsequenter Vernachlässigung von Gliedern, die in q/λ höher als von der zweiten Ordnung sind, ergibt sich daraus für \mathfrak{E}_1^2 der Wert:

$$\mathfrak{E}_1^2 = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{q^2 \pi^2}{\lambda^{3/2}} (s - 1) \sqrt{\frac{2}{r}} \right].$$

Der Klammerausdruck ist größer als 1, und zeigt also eine mit wachsendem q wachsende Verstärkung der Intensität hinter dem Zylinder an, wie wir es vorhin schon aus der Figur abgelesen haben.

Ein Beispiel des Typus III liefert $q = 0,72$ cm; das Minimum, von dem vorher die Rede war, ist in der Figur so flach, daß es kaum wahrzunehmen ist.

Dem Typus II (Schirmwirkung) gehören die übrigen Kurven der Fig. 3 an; bei zweien derselben ist das Minimum deutlich ausgeprägt.

Ein Blick auf die Fig. 3 könnte zu der Anschauung führen, daß die Schattenwirkung, wenn sie erst für ein bestimmtes q eingetreten ist, mit wachsendem q immer größer wird. Doch ist darüber a priori nichts auszusagen; vielmehr bedarf es einer numerischen Rechnung, da die Koeffizienten a_m zu kompliziert gebaut sind, um ohne weiteres eine Diskussion zu gestatten. Da aber der allgemeine Charakter der möglichen Kurven ein für allemal festgestellt ist, bedarf man nur der Kenntnis eines einzigen Punktes jeder Kurve. Wenn man so gemäß (20a) oder (20b) die Werte von \mathfrak{E}_1^2 etwa für die Entfernung $r = 10$ cm von der Zylinderachse berechnet, so kann man eine Kurve derart zeichnen, daß man diese Werte von \mathfrak{E}_1^2

1) Diese spezielle Gleichung findet sich in anderer Form schon bei Rayleigh, Phil. Mag. 12. p. 81. 1881.

als Ordinaten und die zugehörigen Werte des Zylinderradius ρ als Abszissen aufträgt. So ist für die Radien von 0,0 cm bis 1,5 cm die Fig. 4 berechnet, und zwar für die Wellenlängen 24 und 30 cm.

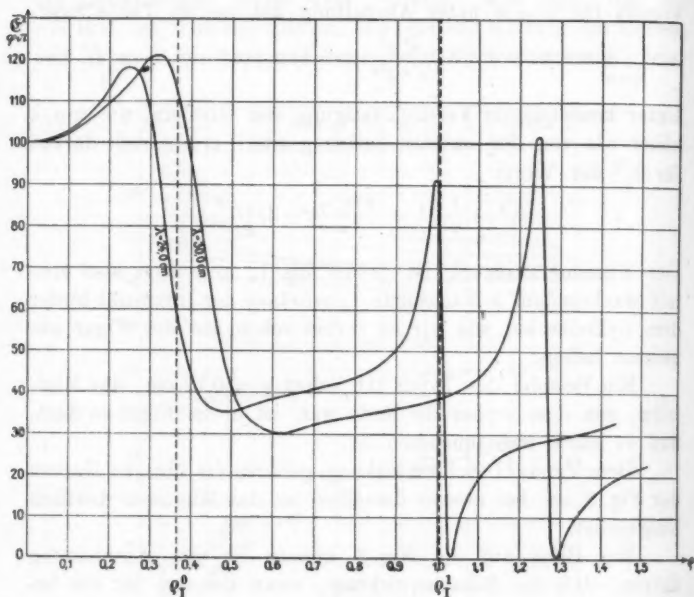


Fig. 4.

Beide Kurven haben denselben Charakter, eine Folge des auf p. 463 ausgesprochenen Ähnlichkeitssatzes.

Die Kurven zeigen für sehr kleine Werte von ρ — in Übereinstimmung mit dem vorhin Gesagten — ein Ansteigen über die der Ordinate 100 entsprechende „freie“ Intensität; diese Verstärkung passiert ein Maximum; für einen bestimmten Wert von ρ schneidet jede Kurve die Ordinate 100. Bei noch größeren Werten von ρ haben wir dann ein rapides Absinken unter diesen Ordinatenwert; an bestimmten Stellen folgt dann aber ein periodisches Auf- und Absteigen der Kurven, das noch einer besonderen Untersuchung bedarf. Es wird im

folgenden gezeigt werden, daß diese Erscheinung mit den *Eigenschwingungen* des dielektrischen Zylinders zusammenhängt.

Der elektromagnetische Zustand des dielektrischen Zylinders ist charakterisiert durch eine partielle Differentialgleichung und zugehörige Randbedingungen; es werden dem Zylinder also im allgemeinen *Eigenschwingungen* zukommen.

Wenn man diese untersuchen will, so hat man wieder auszugehen von der Differentialgleichung (3) und den Randbedingungen (2a) bis (2c). Dagegen kommt natürlich die Bedingung (2d) in Fortfall, da wir ja gar keine „erregende“ Welle hier haben: Im Gegenteil dürfen wir im Außenraum jetzt gar keine *stehenden* Wellen haben, sondern nur solche, die vom Zylinder nach außen fortschreiten.

Wir setzen an, ähnlich wie vorhin:

$$(23) \quad \mathfrak{E} = e^{i\nu t} \sum_m^{0, \infty} Q_m \cdot \cos m\varphi,$$

wobei wir es aber noch unentschieden lassen wollen, ob ν *reell* oder komplex ist. Sollte es komplex sein ($\nu = a + bi$), so sind für uns jedenfalls nur positive Werte von b zu brauchen, da wir andernfalls mit der Zeit *unbegrenzt wachsende* Werte von \mathfrak{E} erhalten würden. Die physikalische Bedeutung von a wäre dann die „*Frequenz*“, die von b die „*Dämpfungskonstante*“ der betreffenden Schwingung.

Durch den Ansatz (23) folgt aus (3) wieder die Besselsche Differentialgleichung (5), deren Lösungen wir jetzt für den Innen- und Außenraum anzusetzen haben. Im Innenraum können wir jedenfalls nur dasjenige Integral brauchen, welches für das Argument $r = 0$ endlich bleibt, also nur $J_m(x)$. Wir haben so:

$$(24) \quad \mathfrak{E}_2 = e^{i\nu t} \sum_m^{0, \infty} B_m J_m(x_2) \cos m\varphi,$$

wenn wir

$$k_2' r = \frac{\nu \sqrt{\varepsilon}}{c} r = x_2$$

setzen.

Im Außenraum dagegen ist $J_m(x)$ nicht brauchbar, weil es Veranlassung zu *stehenden* Wellen geben würde, die bei dem hier betrachteten Problem nicht auftreten dürfen.

Wir erhalten demgemäß im Außenraume:

$$(25) \quad \mathcal{E}_1 = e^{i\nu t} \sum_m^{0, \infty} A_m Q_m(x_1) \cos m\varphi,$$

wenn

$$k_1' r = \frac{\nu}{c} r = x_1$$

gesetzt wird.

Die Grenzbedingungen (2a) und (2c) fordern dann:

$$(26) \quad \begin{cases} A_m Q_m(\xi_1) = B_m J_m(\xi_2), \\ A_m k_1' Q_m'(\xi_1) = B_m k_2' J_m'(\xi_2), \end{cases}$$

wo ξ_1, ξ_2 die Werte von x_1 und x_2 an der Oberfläche, d. h. für $r = \rho$ sind.

Die Gleichungen (26) sind nun durch von Null verschiedene Werte von A_m und B_m nur dann zu befriedigen, wenn folgende Determinante verschwindet:

$$(27) \quad \begin{vmatrix} Q_m(\xi_1) & J_m(\xi_2) \\ k_1' Q_m'(\xi_1) & k_2' J_m'(\xi_2) \end{vmatrix} = 0,$$

oder wenn

$$(27a) \quad \frac{k_1}{k_2} Q_m'(\xi_1) J_m(\xi_2) - J_m'(\xi_2) Q_m(\xi_1) = 0.$$

Die Gleichung (27a) ist aufzufassen als Bedingungsgleichung zur Bestimmung des unbekannten, in ξ_1 und ξ_2 steckenden ν . Da der Index m von 0 bis ∞ läuft, sind unendlich viele Gleichungen (27a) vorhanden.

Man erkennt nun leicht, daß ξ_1 und ξ_2 , mithin auch ν , nicht reell sein können. Denn wäre letzteres der Fall, so wäre $J_m'(\xi_2)/J_m(\xi_2)$ reell, während die Ausdrücke $Q_m'(\xi_1)$ und $Q_m(\xi_1)$ komplex sind. Ein Verschwinden des Ausdruckes (27a) könnte demgemäß nur dadurch hervorgebracht werden, daß der imaginäre und der reelle Teil zugleich, d. h. für denselben Wert von ν verschwinden, was offenbar unmöglich ist. Man sieht also, daß ungedämpfte Schwingungen — diese würden ja reellem ν entsprechen — überhaupt nicht existieren können, was physikalisch wegen der Ausstrahlung auch unmittelbar einleuchtend ist. Also müssen ξ_1 und ξ_2 , und folglich auch ν als komplex angenommen werden.

Jede der unendlich vielen Gleichungen (27a) hat nun unendlich viele Wurzeln, deren reeller Teil jedesmal die Frequenz,

deren imaginärer die Dämpfung der Eigenschwingungen bestimmt. Die Anzahl der letzteren ist also ∞^2 .

Die numerische Berechnung der einzelnen Werte ist recht umständlich und soll daher hier unterbleiben. Doch müssen wir jetzt auf den Zusammenhang der Eigenschwingungen mit dem oben erwähnten periodischen Schwanken der Kurven von Fig. 4 näher eingehen.

Zu dem Zweck bringen wir die Koeffizienten a_m (vgl. Gl. (10)) auf folgende Gestalt:

$$(28) \quad a_m = 2i^m \frac{J_m(\pi_1) J_m'(\pi_2) - \frac{k_1}{k_2} J_m'(\pi_1) J_m(\pi_2)}{\frac{k_1}{k_2} Q_m'(\pi_1) J_m(\pi_2) - J_m'(\pi_2) Q_m(\pi_1)}.$$

Ein Vergleich von (27a) mit dem Nenner von (28) läßt erkennen, daß beide den gleichen analytischen Ausdruck haben, wenn davon abgesehen wird, daß $\xi_1 \xi_2$ komplex, dagegen $\pi_1 \pi_2$ reell sind. Dieser Unterschied liegt in der Natur der Sache, da die *erzwungenen* Schwingungen ja ungedämpft sind. Daraus folgt übrigens nach dem vorher Entwickelten, daß die Koeffizienten a_m niemals ∞ werden können, also auch \mathfrak{E}_1 immer endlich bleibt. Die Übereinstimmung der Form des Nenners von (28) und von (27a) berechtigt uns nun dazu, die Wurzeln des reellen Teiles des Nenners von (28) als *die Frequenzen der ungedämpften Eigenschwingungen* zu bezeichnen, während der reelle Teil von (27a) diejenigen der gedämpften liefert. Und zwar sind hier, wie stets, die Frequenzen der gedämpften Schwingung *kleiner* wie die der entsprechenden ungedämpften Schwingung.

Um nun zu einem Urteil über den Zusammenhang der Eigenschwingungen mit dem erwähnten Auf- und Abschwanken der Kurven von Fig. 4 zu gelangen, sind die ersten Wurzeln für den Index $m = 0$ und $m = 1$ berechnet worden.

Es ergab sich so für $m = 0$ angenähert

als *erste* Wurzel: $\pi_1 = 0,0955$, woraus $\varrho_1^0 = 0,365$ cm
für $\lambda = 24$ cm folgt¹⁾;

als *zweite* Wurzel: $\pi_1 = 0,465$, woraus $\varrho_1^0 = 1,776$ cm
für die nämliche Wellenlänge,

1) Es genügt die Angabe von ϱ für eine Wellenlänge.

Für $m = 1$ ergab sich als angenäherter Wert für die erste Wurzel: $\pi_1 = 0,263$, woraus $\rho_1^1 = 1,006$ cm folgt.

In der Fig. 4 sind diese Werte auf der Abszissenachse eingetragen und durch die so erhaltenen Punkte Parallelen zur Ordinatenachse gezogen. Man erkennt, daß die Maxima sämtlicher berechneter periodischer Stellen sehr nahe mit diesen Werten zusammenfallen, wodurch der Zusammenhang dieses eigentümlichen Phänomens mit den Eigenschwingungen evident wird. Man kann demnach das hier behandelte Beugungsproblem auch als einen Fall *erzwungener Schwingungen* oder, was auf dasselbe hinauskommt, als ein *Resonanzproblem* auffassen. Darin ist ein innerer Zusammenhang mit der Theorie der Dispersion begründet, auf den am Schlusse des theoretischen Teiles noch näher eingegangen werden soll.

Die im Vorhergehenden angestellten theoretischen Erwägungen [vgl. insbesondere die Diskussion der Gleichungen (17), (18), (20), (20a)] lassen noch eine Lücke: da wir nämlich die asymptotischen Darstellungen der Besselschen Funktionen eingeführt haben — ohne welche eine *allgemeine* Untersuchung überhaupt unmöglich gewesen wäre —, kennen wir die Verhältnisse erst in *einiger Entfernung* vom Zylinder, während z. B. die Vorgänge an der Oberfläche des Zylinders noch im Dunkeln sind.

Es sind deshalb bei einer gegebenen Wellenlänge ($\lambda = 24$ cm) für eine Anzahl von Werten von ρ ($\rho = 0,21$ cm; 0,56 cm; 0,73 cm; 0,99 cm; 1,02 cm) die Beträge von $\bar{\mathcal{E}}_1^2$ rings um die Oberfläche herum berechnet worden; der Winkel φ hatte dabei nacheinander die Werte

$$\varphi = 0^\circ, 20^\circ, 40^\circ, 60^\circ, 80^\circ, 90^\circ, 100^\circ, 120^\circ, \\ 140^\circ, 160^\circ, 180^\circ.$$

Weiter zu gehen ist nicht notwendig, da das Phänomen zu beiden Seiten der x -Achse symmetrisch verläuft.

Die Werte von $\bar{\mathcal{E}}_1^2$ sind, *ausgedrückt in Prozenten der „freien“ Intensität*, in der folgenden Tabelle enthalten und in den Figg. 5 u. 6 dargestellt.

φ	$\varrho =$				
	0,21	0,56	0,73	0,99	1,02
0°	222 Proz.	16,2 Proz.	5,06 Proz.	1996 Proz.	1285 Proz.
20	223	15,7	4,32	1766	1136
40	223,95	14,4	2,67	1178	760
60	225,28	12,7	1,46	505	328
80	226,9	11,4	2,18	63	41
90	227,76	11,0	3,56	0	0,1
100	228,60	10,8	5,62	62	41
120	229,75	11,1	11,39	508	375
140	231,02	11,9	17,87	1200	863
160	231,84	12,7	22,86	1812	1156
180	232,12	13,02	24,90	2042	1312

Ein Blick auf die Tabelle lehrt, daß es sich hier um ganz verschiedene Größenordnungen von $\overline{\mathcal{E}}_2^2$ handelt; deshalb

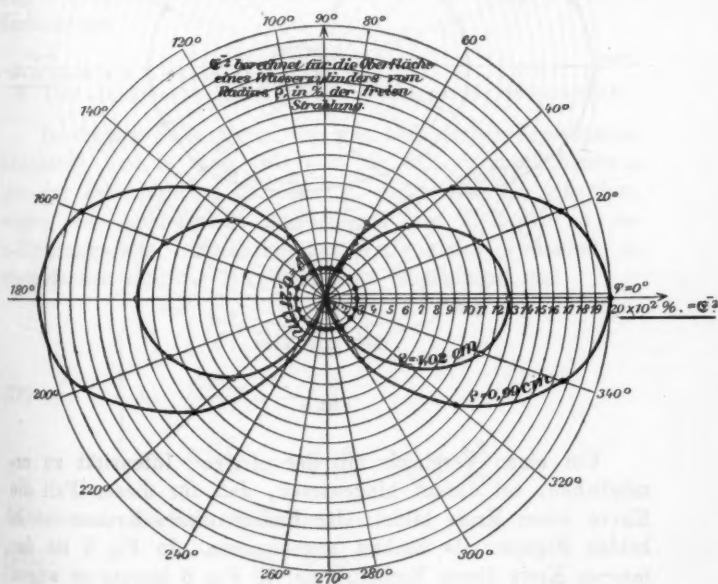


Fig. 5.

ist Fig. 6 im 100fachen Maßstabe der Fig. 5 angelegt. Die Kurven in Fig. 5 und 6 sind folgendermaßen erhalten:

Vom Zentrum der Figur aus sind Radienvektoren gezogen, die mit der Richtung der einfallenden Wellen die oben angeführten Winkel φ bilden. Die Radienvektoren sind jedesmal so lang gewählt worden, als es dem zugehörigen, aus der Tabelle ersichtlichen Werte von \overline{G}_1^2 entspricht. Die erhaltenen Punkte wurden dann zu Kurven ergänzt.

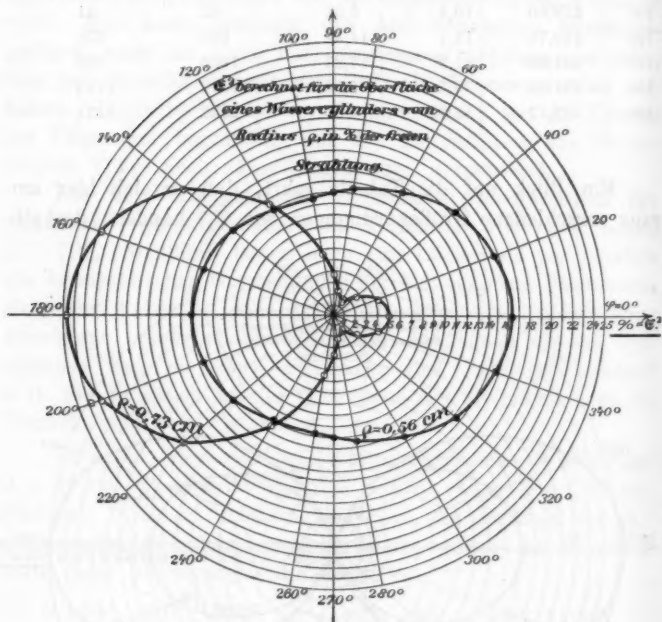


Fig. 6.

Um einen Vergleich mit der „freien“ Intensität zu ermöglichen, sei darauf hingewiesen, daß für diesen Fall die Kurve einen Kreis bildet; der Radius dieses Kreises ist in beiden Figuren als Einheit angenommen. In Fig. 5 ist der innerste Kreis dieser Einheitskreis; in Fig. 6 konnte er wegen der 100fachen Vergrößerung nicht gezeichnet werden; er würde

noch den 4fachen Radius des äußersten Kreises dieser Figur besitzen.

Die Kurven zeigen besser als jede Schilderung die eigentümliche Art der Energieverteilung an der Oberfläche des Zylinders. Im besonderen beachte man folgendes: Die Werte von ρ sind so gewählt, daß sie mit den Eigenschwingungen (vgl. Fig. 4) in Beziehung stehen: $\rho = 0,21$ cm liegt vor, $\rho = 0,56$ cm und $\rho = 0,73$ cm hinter dem Maximum der ersten Eigenschwingung; ebenso $\rho = 0,99$ in unmittelbarer Nähe vor, $\rho = 1,02$ in unmittelbarer Nachbarschaft hinter dem zweiten Maximum. Während für $\rho = 0,21$ die Energie rings herum gegen die normale vergrößert ist (Fig. 5), ist sie für $\rho = 0,56$ und $\rho = 0,73$ sehr erheblich herabgesetzt (Fig. 6), um für die der zweiten Eigenschwingung unmittelbar benachbarten übrigen Werte eine ganz enorme Größe zu erreichen (Fig. 5). Die periodischen Schwankungen von $\overline{\mathcal{E}_1^2}$ der Fig. 4 prägen sich demnach auch in den Figg. 5 und 6 deutlich aus.

B. Die elektrische Kraft ist senkrecht zur Zylindrachse.

In diesem Falle treten von den elektrischen Kraftkomponenten \mathcal{E}_r und \mathcal{E}_φ auf, während von den magnetischen nur (die der Zylindrachse parallele) \mathcal{H}_z vorkommt. Da außerdem, wegen der unendlichen Ausdehnung der Zylinder in der z -Richtung, alle Differentiationen $\partial/\partial z$ gleich Null sind, so vereinfachen sich die Maxwell'schen Gleichungen zu:

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathcal{E}_r}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial \varphi}, \\ \text{b) } \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathcal{E}_\varphi}{\partial t} = - \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial r}, \\ \text{c) } \frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial t} = - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \mathcal{E}_\varphi) + \frac{\partial \mathcal{E}_r}{\partial \varphi}. \end{array} \right.$$

Dazu treten die Grenzbedingungen:

$$(30a) \quad (\mathcal{H}_z)_1 = (\mathcal{H}_z)_2;$$

$$(30b) \quad (\mathcal{E}_\varphi)_1 = (\mathcal{E}_\varphi)_2.$$

Endlich noch die (2d) analoge Gleichung:

$$(30c) \quad (\tilde{\Phi}_2)_{r=\infty} = e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(ct+x)} = e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(ct+r \cos \varphi)} \cdot 1)$$

Aus (29c) erhält man in der bekannten Weise folgende Differentialgleichung für $\tilde{\Phi}$ (wie wir jetzt kurz statt $\tilde{\Phi}_2$ schreiben wollen):

$$(31) \quad \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial \varphi^2},$$

die vollkommen mit Gleichung (3) für \mathfrak{E} identisch ist. Deshalb folgt durch die nämlichen Ansätze (vgl. Gleichung (4)) auch hier:

$$\frac{d^2 Q_m}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d Q_m}{dr} + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2}\right) Q_m = 0,$$

wo k^2 dieselbe Bedeutung wie früher hat.

Ohne weitere Rechnung ergibt sich daher:

$$(32) \quad \begin{cases} \tilde{\Phi}_1 = e^{int} \sum_m^{0, \infty} [c_m Q_m'(p_1) + d_m J_m(p_1)] \cos m \varphi, \\ \tilde{\Phi}_2 = e^{int} \sum_m^{0, \infty} d_m' J_m(p_2) \cos m \varphi, \end{cases}$$

wo c_m, d_m, d_m' zu bestimmende Koeffizienten sind. Aus den Grenzbedingungen (30) folgt $d_0 = 1, d_m = 2im$; ferner ergibt sich für die für uns wichtigsten Koeffizienten c_m folgende Gleichung:

$$(33) \quad \frac{2im}{c_m} = \frac{\varepsilon \frac{k_1}{k_2} K_m'(\pi_1) - \frac{J_m'(\pi_2)}{J_m(\pi_2)} K_m(\pi_1)}{J_m(\pi_1) \frac{J_m'(\pi_2)}{J_m(\pi_2)} - \varepsilon \frac{k_1}{k_2} J_m'(\pi_1)} + \frac{i\pi}{2}.$$

Nach Gleichung (29b) erhält man nun für die zur Zylinderachse senkrechte Komponente \mathfrak{E}_φ die beiden Gleichungen:

$$(34) \quad \begin{cases} \mathfrak{E}_{\varphi_1} = ie^{int} \sum_m^{0, \infty} [c_m Q_m'(p_1) + d_m J_m'(p_1)] \cos m \varphi, \\ \mathfrak{E}_{\varphi_2} = \frac{i}{\sqrt{s}} e^{int} \sum_m^{0, \infty} d_m' J_m'(p_2) \cos m \varphi. \end{cases}$$

1) Eigentlich sollte rechts das Minuszeichen stehen, mit Rücksicht auf Gleichung (2d); doch ist das belanglos.

Beachtet man, daß

$$\sum_m^0 d_m J_m(p_1) \cos m \varphi = e^{i p_1 \cos \varphi},$$

also

$$\sum_m^0 d_m J'_m(p_1) \cos m \varphi = i \cos \varphi e^{i p_1 \cos \varphi}$$

ist, so folgt endlich für \mathfrak{E}_{φ_1} der Wert:

$$(35) \quad \mathfrak{E}_{\varphi_1} = e^{i n t} \left[\sum_m^0 [i c_m Q'_m(p_1) \cos m \varphi] + i \cos \varphi e^{i p_1 \cos \varphi} \right].$$

Diese Gleichung wollen wir noch durch Einführung der asymptotischen Formeln für Q'_m vereinfachen und dann diskutieren. Nach (7) und (7a) ergibt sich dann, wenn man sich auf drei Glieder der Reihe beschränkt, was hinreichende Kleinheit von ϱ/λ zur Voraussetzung hat:

$$(36) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E}_{\varphi_1} = e^{i n t} \{ [c_0 + i c_1 \cos \varphi - c_2 \cos 2 \varphi] Q_0(p_1) \\ + i \cos \varphi e^{i p_1 \cos \varphi} \}. \end{aligned} \right.$$

Schreibt man:

$$c_m = \gamma_m + i \delta_m,$$

und führt die Abkürzungen ein:

$$(37) \quad \left\{ \begin{aligned} \gamma_0 - \delta_1 \cos \varphi - \gamma_2 \cos 2 \varphi &= C_\varphi, \\ \delta_0 + \gamma_1 \cos \varphi - \delta_2 \cos 2 \varphi &= D_\varphi, \\ \psi &= \pi/4 - p_1, \end{aligned} \right.$$

so erhält man bei Beschränkung auf den reellen Teil:

$$(38) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E}_{\varphi_1} &= -\cos \varphi \sin(n t + p_1 \cos \varphi) \\ &+ \sqrt{\frac{\pi}{2 p_1}} \{ C_\varphi \sin(n t + \psi) + D_\varphi \cos(n t + \psi) \}, \end{aligned} \right.$$

oder endlich:

$$(39) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E}_{\varphi_1} &= \cos n t \left[-\cos \varphi \cdot \sin(p_1 \cos \varphi) \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{\pi}{2 p_1}} (C_\varphi \sin \psi + D_\varphi \cos \psi) \right] \\ &+ \sin n t \left[-\cos \varphi \cdot \cos(p_1 \cos \varphi) \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{\pi}{2 p_1}} (C_\varphi \cos \psi - D_\varphi \sin \psi) \right] \dots \end{aligned} \right.$$

Diese Gleichung stimmt ihrer Form nach im wesentlichen mit (16) überein, so daß auch die aus dieser Gleichung gezogenen Folgerungen der Hauptsache nach auch hier dieselben sind.¹⁾ Eine genauere Diskussion erübrigt sich deshalb.

Aus nachher zu erörternden Gründen soll jedoch der Fall $\varphi = \pi$ noch etwas näher besprochen werden. Da der allgemeine Charakter der Erscheinung derselbe ist, wie im Falle A, so genügt

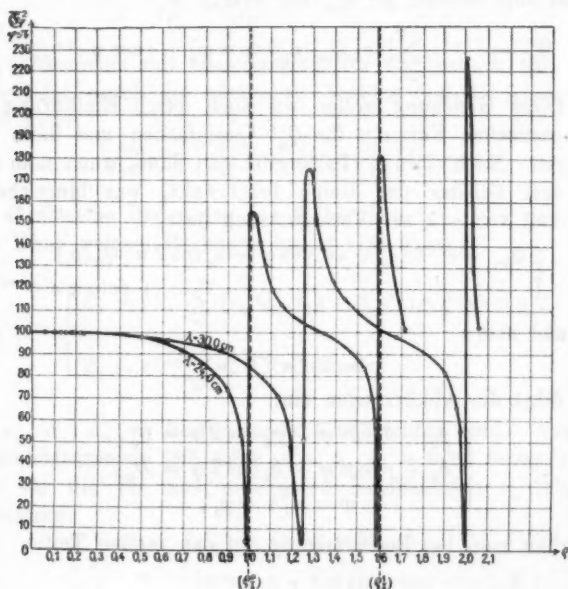


Fig. 7.

es hier für unsere Zwecke, nach Analogie der Fig. 4, \overline{G}_{φ}^2 als Funktion von ρ/λ in einer bestimmten Entfernung ($r = 10$ cm) für einige Wellenlängen zu kennen. So ist die Fig. 7 für $\lambda = 24$ und 30 cm berechnet²⁾, aus der ersichtlich ist, daß

1) Nur für $\varphi = \pi/2$ zeigt sich hier eine Besonderheit, insofern infolge des Faktors $\cos \varphi$ dann das erste Glied der beiden Klammern in (39) in Fortfall kommt.

2) Für die Berechnung dieser Kurve sind wir Hrn. cand. phil. Gruschke zu Dank verpflichtet.

auch in diesem Falle die Kurven die periodischen Schwankungen zeigen, die schon in Fig. 4 beobachtet wurden. Natürlich hängen diese Stellen auch hier wieder mit den *Eigenschwingungen* zusammen. Diese letzteren erhält man, ebenso wie früher, indem man die Wurzeln des reellen Teiles des Nenners von c_m berechnet. Man erhält hier die Gleichung (diese ist natürlich eine andere, als im Falle A):

$$(40) \quad \varepsilon \frac{k_1}{k_2} K_m'(\pi_1) J_m(\pi_2) - J_m'(\pi_2) K_m(\pi_1) = 0.$$

Als *erste* Wurzel für $m = 0$ erhält man:

$$\pi_1 = 0,263,$$

und daraus

$$(\varrho_1^0)^{-1} = 1,005$$

für $\lambda = 24$ cm; als *erste* Wurzel für $m = 1$ folgt:

$$\pi_1 = 0,420,$$

woraus

$$(\varrho_1^1)^{-1} = 1,604$$

für die nämliche Wellenlänge.

Beide Werte von ϱ sind in Fig. 7 eingetragen und durch sie Parallelen zur Ordinatenachse gezogen, die den Zusammenhang mit den Schwankungen deutlich hervortreten lassen. Auch der Fall B ist daher als *Resonanzproblem* charakterisierbar.

Zu den Figg. 4 und 7 sind noch folgende Bemerkungen zu machen, deren erste folgenden Punkt betrifft:

Denkt man sich statt eines einzelnen Zylinders deren eine Reihe in gleichen Abständen, senkrecht zur Fortschreitungsrichtung der einfallenden Welle gestellt, wobei die Abstände gegen die Wellenlänge groß gewählt sein mögen, so erhält man ein Beugungsgitter, dessen Eigenschaften in erster Näherung durch einfache Superposition der Wirkungen der einzelnen Zylinder und der einfallenden Welle erhalten werden können. Wir betrachten nun *nur* diejenigen von den Zylindern ausgehenden Wellen, welche dem Winkel $\varphi = \pi$ entsprechen. Werden dieselben durch eine Linse gesammelt, so erhält man in der Brennebene das sogenannte *Zentralbild* des Beugungs-

1) Zur Unterscheidung von den früher berechneten Wurzelwerten ϱ eingeklammert.

gitters. Wie aus dieser Darstellung hervorgeht, entspricht die Helligkeit des Zentralbildes gerade den in den Figg. 4 und 7 eingetragenen Werten von $\overline{\mathcal{E}}_1^2$ bzw. $\overline{\mathcal{E}}_\varphi^2$, wenn man die Helligkeiten des Zentralbildes in Prozenten der ursprünglichen (ohne Gitter vorhandenen) Intensität mißt. Man bezeichnet dieses Verhältnis in der Optik wohl als „Durchlässigkeit“ des Gitters; wir werden diese Bezeichnung auch auf unsere Werte $\overline{\mathcal{E}}_1^2$ und $\overline{\mathcal{E}}_\varphi^2$ bei einem Zylinder übertragen und erstere durch D_{\parallel} und letztere durch D_{\perp} bezeichnen; die Indizes geben die Lage des elektrischen Vektors zur Zylinderachse an.

Es haben nun insbesondere die Herren du Bois und Rubens¹⁾ für Metalldrahtgitter das „Durchlässigkeitsverhältnis“ D_{\parallel}/D_{\perp} als Funktion der Wellenlänge λ (oder, was auf dasselbe herauskommen würde, von ϱ/λ) untersucht. Sie fanden bei ihren Gittern — der Radius ϱ jedes Zylinders war groß gegen die Wellenlänge —, daß im sichtbaren Gebiet der Wert $D_{\parallel}/D_{\perp} > 1$ war, mit zunehmender Wellenlänge (d. h. abnehmendem ϱ/λ) allmählich sich dem Werte 1 näherte, diesen Wert bei einer bestimmten Wellenlänge (ca. 3–4 μ) erreichte, um dann mit noch größerer Wellenlänge unter 1 zu fallen. Die physikalische Bedeutung des „Durchlässigkeitsverhältnisses“ D_{\parallel}/D_{\perp} ist folgende:

Ist $D_{\parallel}/D_{\perp} < 1$, so bedeutet das, daß das Gitter von „parallel polarisierter“²⁾ Strahlung weniger durchläßt, als von „senkrecht polarisierter“²⁾. Umgekehrt würde ein Gitter sich gegen die Strahlung einer Wellenlänge verhalten, für die $D_{\parallel}/D_{\perp} > 1$ ist. Für den „Inversionspunkt“ ($D_{\parallel}/D_{\perp} = 1$) würde die Stellung der Gitterstäbe zur Polarisationsrichtung gleichgültig sein. Das erstere Verhalten ($D_{\parallel}/D_{\perp} < 1$) findet man bei den sogenannten Hertzischen Drahtgittern am stärksten ausgeprägt; den anderen Fall ($D_{\parallel}/D_{\perp} > 1$) für die du Bois-Rubensschen Drahtgitter im sichtbaren Gebiet. Unpolarisierte Strahlung wird daher durch ein Hertzisches Gitter umgekehrt polarisiert, wie durch ein du Bois-Rubenssches. Eine exakte Theorie dieser Umkehr der Gitterwirkung für den du Bois-

1) H. du Bois u. H. Rubens, Wied. Ann. 49. p. 593. 1893.

2) „Parallel“ und „senkrecht“ bezieht sich immer auf die Richtung des elektrischen Vektors zur Zylinderachse.

Rubensschen Fall steht zurzeit noch aus. Es ist unter diesen Umständen nun interessant, daß wir für *einen* dielektrischen Zylinder imstande sind, das „Durchlässigkeitsverhältnis“ D_{\parallel}/D_{\perp} zu berechnen. Man hat dazu einfach die Ordinaten der entsprechenden Kurven in Figg. 4 und 7 durcheinander zu dividieren. Das Resultat dieser Division ist in Fig. 8 niedergelegt, wo für $\lambda = 24$ und $\lambda = 30$ das Verhältnis D_{\parallel}/D_{\perp} als Funktion von ϱ dargestellt ist.

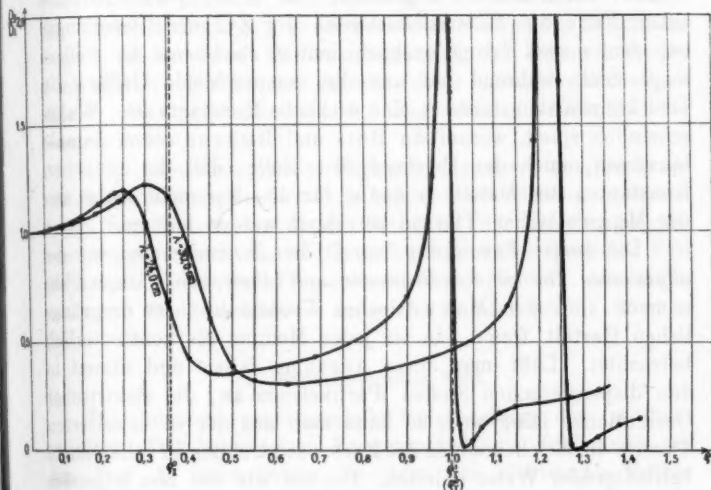


Fig. 8.

Man erkennt daraus, daß das *Phänomen der Inversion* auch bei einem Zylinder auftreten kann, und zwar gibt es viele Inversionspunkte. Man übersieht auch sofort, daß hier bei uns diese Inversionspunkte da auftreten werden, wo hinreichend stark ausgeprägte Eigenschwingungen vorhanden sind. In unserem Falle geben alle berechneten Eigenschwingungen Veranlassung zu diesem Phänomen, und man kann allgemein sagen, daß an den Stellen der Eigenschwingungen wenigstens *Anomalien* in dem Gange des *Durchlässigkeitsverhältnisses* D_{\parallel}/D_{\perp} zu erwarten sind.

Ein Blick auf die beiden Kurven in Fig. 8 zeigt sofort,

daß die *Lage* der Inversionspunkte eine Funktion von q/λ ist, in dem Sinne, daß für größeres λ diese Stellen zu größeren q rücken. Dies ist eine selbstverständliche Folge des p. 463 ausgesprochenen Ähnlichkeitssatzes. Hier ist der tiefgreifende Unterschied unserer Inversionspunkte und des von du Bois-Rubensschen beobachteten. Dieser letztere nämlich ist — soweit die Beobachtungen reichen — für gegebene Wellenlänge *unabhängig* von der Stärke der Drahtzylinder. Dies ist wesentlich in dem Umstande begründet, daß im du Bois-Rubensschen Falle die Materialkonstanten der Zylinder (Brechungsexponent ν und Extinktionskoeffizient κ) *Funktionen der Wellenlänge* sind, während bei uns die entsprechende Größe, die Dielektrizitätskonstante ϵ , eine wirkliche Konstante ist. Wahrscheinlich spielt, worauf du Bois und Rubens schon damals hinwiesen, auch der Umstand eine Rolle, daß die optischen Konstanten der Metalle (ν und κ) für $\lambda = 3 \mu$ nicht mehr aus der Maxwellschen Theorie berechnet werden können.¹⁾

Die zweite Bemerkung betrifft den *Zusammenhang mit der allgemeinen Theorie der Dispersion und Absorption*. Diese Phänomene sind der Maxwellschen Theorie in ihrer ursprünglichen Gestalt fremd, da sie jedes Medium als kontinuierlich betrachtet. Läßt man diese Annahme fallen und nimmt in den dispergierenden Stoffen Partikelchen an, die elektrischer Oszillationen fähig sind, so kann man aus der so erweiterten Theorie die Erscheinungen der Farbenzerstreuung in vollkommen befriedigender Weise ableiten. Denken wir uns nun folgendes Medium hergestellt: Ins Vakuum werden in regelmäßiger Anordnung parallele dielektrische, unendlich lange Zylinder eingebettet, in Abständen, die zwar klein gegen die Wellen-

1) Es mag noch folgendes betont werden: Für elektrische Wellen und dicke Metallzylinder kann man die Leitfähigkeit als ∞ ansehen. Dann gilt, wie man sich leicht überzeugen kann, der oben ausgesprochene Ähnlichkeitssatz wieder. Treten also hier auch Inversionspunkte auf — was durch das Experiment geprüft werden kann und von vornherein wahrscheinlich ist —, so muß deren Lage sich mit wachsendem λ ebenso zu größeren Werten von q verschieben, wie dies bei dem dielektrischen Zylinder der Fall ist. — Übrigens würde man zweifellos auch eine Verschiebung des Inversionspunktes im du Bois-Rubensschen Falle erhalten, wenn man die Gitterdimensionen in *erheblich* weiteren Grenzen variierte, was jedoch experimentell sehr schwierig ist.

länge, aber doch so groß sein sollen, daß die gegenseitige Beeinflussung vernachlässigt werden kann: dann muß dieses Medium nach der allgemeinen Theorie die Erscheinungen der Dispersion und Absorption zeigen, da ja die Zylinder Eigenschwingungen ausführen können.

Und zwar wird der Brechungsexponent in den beiden Fällen ($\mathcal{E} \parallel$ oder $\mathcal{E} \perp$ zur Zylinderachse) verschieden ausfallen: das Medium ist also auch doppelbrechend. Berücksichtigt man endlich, daß je nach der Richtung des elektrischen Vektors die Eigenschwingungen an verschiedenen Stellen des Spektrums liegen, so hat unser Medium gleichzeitig die Eigenschaft des Dichroismus. Wir können dasselbe daher als ein vollständiges Modell eines doppelbrechenden, dichroitischen Kristalles betrachten.¹⁾

Den unendlich vielen Eigenschwingungen entsprechend, würde die Dispersionsformel unendlich viele Glieder besitzen; wegen der Konvergenz dieser Reihe ist der Brechungsexponent trotzdem endlich, und man hat hier einen speziellen Fall derjenigen Form der Dispersionstheorie, die von dem einen von uns²⁾ für *Serienspektren* entworfen worden ist.

II. Experimenteller Teil.

Die folgende experimentelle Untersuchung des im theoretischen Teil behandelten Beugungsproblems durfte sich auf den Fall A beschränken, in dem der elektrische Vektor parallel zur Zylinderachse orientiert ist, da die Formeln im Falle B im wesentlichen denselben Charakter tragen.

Es handelte sich also darum, die Vorgänge in der Umgebung des Zylinders für $\varphi=0$, $\varphi=\pi/2$, $\varphi=\pi$ zu untersuchen.

A. Anordnung und Methode.

Ein Hertzscher Erreger, der in der Brennnlinie eines parabolischen Spiegels aufgestellt war, erzeugte die primären ebenen

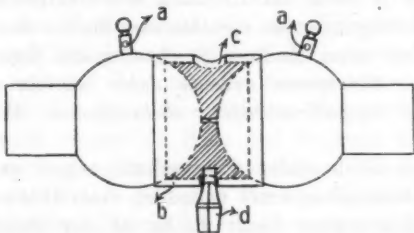
1) Eine ähnliche Betrachtung ist von Hasenöhr (Wien. Ber. 111. p. 1230. 1902) angestellt worden für ein Medium, in das äquidistante dielektrische Kugeln eingelagert sind: dieses Medium wird natürlich dispergierend, aber weder doppelbrechend noch dichroitisch.

2) Cl. Schaefer, Ann. d. Phys. 28. p. 421. 1909; 29. p. 715. 1909.

polarisierten Wellen, die dann auf das zylindrische Hindernis fielen. Durch ein an geeigneter Stelle im Strahlengange befindliches Thermoelement nach Klemenčič wurde die Größe \mathcal{E}^2 , die im theoretischen Teile berechnet wurde, beobachtet.

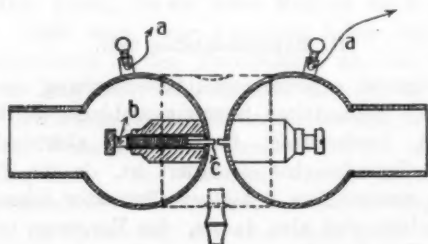
Über die Anordnung im einzelnen ist folgendes erwähnenswert:

Der *Erreger* (Figg. 9 und 10) bestand aus zwei gleich langen, an dem einen Ende mit Kugeln von 4,2 cm Durch-



a Zuleitung vom Induktor. *b* Hartgummiring. *c* Öffnung zum Einfüllen. *d* Verschlussstopfen.

Fig. 9. Erreger.



a Zuleitung vom Induktor. *b* Mikrometerschrauben. *c* Aluminiumstifte.

Fig. 10. Erreger.

messer versehenen Messingzylindern von 2,1 cm Durchmesser und 2,1 cm Länge. Um die Länge des Oszillators und damit die Wellenlänge seiner Grundschwingung variieren zu können, wurden nach einer von dem einen von uns¹⁾ früher angewandten Anordnung posaunenartige Auszüge benutzt. Diese

1) Cl. Schaefer, Ann. d. Phys. 16. p. 106 ff. 1905.

waren mit einer Teilung versehen, an der man die Wellenlänge direkt ablesen konnte.

Die Funken gingen nicht in Luft, sondern in Öl über, und zwar wurde eine Mischung von Maschinenöl und Benzin zu gleichen Teilen verwendet. Um das Öl zu halten, war um die beiden Erregerkugeln ein Hartgummiring (*b*) (Fig. 9) herumgelegt und mit Schellack an dieselben angekittet. Oben befand sich in dem Ringe eine Öffnung (*c*) zum Einfüllen des Öles, an der Unterseite ebenfalls eine solche (*d*), durch einen Hartgummistopfen verschließbar, um den Behälter reinigen zu können.

Um ein regelmäßiges und möglichst konstantes Funktionieren des Erregers zu erzielen, wurde das von M. Laugwitz¹⁾ empfohlene Verfahren angewendet: An den Erregerkugeln wurden kleine, durch eine Mikrometerschraube (*b*) in Fig. 10 vom Innern der Metallzylinder her verstellbare Aluminiumstifte (*c*) angebracht, so daß die Funken zwischen diesen Stiften überspringen mußten. Die Endflächen konnten durch die Stellschrauben einander bis auf Bruchteile eines Millimeters genähert werden. Dadurch wurde erreicht, daß die Funken immer an derselben Stelle und in gleicher Länge, nämlich zwischen den sehr kleinen Endflächen der Stifte, übergingen. Die Aluminiumstifte besaßen einen Durchmesser von 1 mm und ragten etwa ebensoweit aus den Kugeln hervor.

Wenn mit dieser Anordnung eine Messung repetiert wurde, so nahm zu Beginn die vom Erreger gelieferte Energiemenge ziemlich gleichmäßig entweder zu oder ab. Nach ein paar „Zündungen“ jedoch wurde die Strahlung außerordentlich konstant, und erst wenn dieser Zustand eingetreten war, was durch eine Reihe von besonderen Messungen jedesmal geprüft wurde, wurde mit den definitiven Ablesungen begonnen.

Um ein Urteil über die Konstanz der Strahlung zu ermöglichen, lassen wir eine Tabelle folgen, in der eine Anzahl (6) aus dem Beobachtungsjournal *willkürlich herausgegriffener* Ablesungsreihen angeführt ist.

1) M. Laugwitz, Phys. Zeitschr. 8. p. 378. 1907.

Tabelle.¹⁾

Galvanometerausschläge					
275	107	139	176	82,5	109,0
274	108	141	176	81,5	109,0
273	109	138	176	83,0	109,8
273	109	138	175	82,3	109,3
272	109	138	177	83,0	109,0
272	109	137	175	82,0	109,8
271	108	137	177	82,0	109,3
270	109	136	175	82,0	109,3
269	109	136	175	82,5	109,8
269	109	136	173	83,5	109,3
Mittl. Fehler in %	0,24	0,04	0,36	0,21	0,23
				0,23	0,09

Der Erreger befand sich in der — horizontal liegenden — Brennnlinie eines parabolischen *Hohlspiegels* von 118×200 qcm Öffnung. Durch die Hinterwand führten Glasröhrchen für die Zuleitungsdrähte des *Induktoriums*. Als solches wurde ein kleiner Induktor von Keiser und Schmidt mit Wagnerischem Hammer benutzt, der durch einen Akkumulator gespeist wurde. Um die Funken an der Unterbrechungsstelle des Hammers nach Möglichkeit zu beseitigen, wurde eine entsprechende Kapazität parallel geschaltet.

Die Strahlung wurde gemessen durch ein *Klemenčičsches Thermoelement*, das auf den Erreger abstimmbaar war; es war in Verbindung mit einem hochempfindlichen *du Bois-Rubensschen Panzergalvanometer* in Juliusscher Aufhängung. Der Empfänger war befestigt auf einem horizontal und vertikal verschiebbaren Gestell aus Holz und Hartgummi.

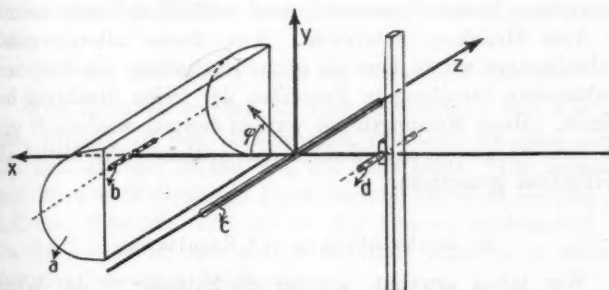
Die *Zylinder*, deren Wirkung auf den Strahlengang hier untersucht werden sollte, waren verschiedene, mit Leitungswasser gefüllte Glasrohre von 0,2 bis 3,0 cm lichter Weite.

1) Ich führe diese Tabelle namentlich aus dem Grunde an, weil der Laugwitzsche Erreger in den „Beiblättern“ zum Gegenstande einer abfälligen Kritik gemacht worden ist. Eine Korrespondenz mit dem Hrn. Referenten hat mich überzeugt, daß die Prämissen seines Urteils auf einem Mißverständnisse beruhen.

Schaefer.

Die Dicke der Zylinder war — entsprechend den berechneten Fällen — klein gegen die zur Verwendung kommenden Wellenlängen von 24—58 cm; ihre Länge betrug etwa 2 m; obwohl dies keineswegs unendlich groß gegen die Wellenlänge ist, reicht diese Länge doch aus, da der Empfänger im wesentlichen nur der störenden Einwirkung der *nahe* gelegenen Teile des Zylinders unterliegt, während sich die Wirkung entfernterer Teile nicht mehr bemerkbar macht. Eine Verlängerung bzw. Verkürzung der Stäbe um 10 Proz. ergab in der Tat — übereinstimmend mit obiger Auseinandersetzung — keine Abweichung in den Resultaten.¹⁾

Der *Aufbau* geschah in Übereinstimmung mit Fig. 1 und ist am besten ersichtlich aus Fig. 11.



a Spiegel. b Erreger. c Zylinder. d Thermoelement.

Fig. 11. Aufbau.

Die Zylinderachse fiel mit der z -Achse zusammen, die z -Achse zeigte mit ihrer positiven Richtung nach dem Erreger hin. In den Fällen, die früher diskutiert wurden ($\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$), befand sich der Empfänger natürlich ebenfalls auf der x -Achse. Die positive Richtung der y -Achse, in welche der Empfänger für $\varphi = \pi/2$ eingestellt wurde, zeigte von der Zylinderachse senkrecht nach oben.

Die Funkenstrecke lag dann auf der x -Achse, der Erreger selbst parallel zur z -Achse; die Brennnlinie des Spiegels ging ebenfalls parallel zur z -Achse durch die Achse des Er-

1) Vgl. hierzu auch G.^{*}H. Thomson, Inaug.-Diss. Straßburg 1906.

regers. Die Spiegelöffnung stand senkrecht auf der x -Achse, die Resonatoren des Thermoelementes waren stets parallel zur z -Achse gerichtet.

Es ist noch hinzuzufügen, daß die x -Achse *diagonal* zum *Zimmerviereck* gerichtet war und sich in einer Höhe von 1,40 m vom Erdboden befand. Dadurch wurde bezweckt, störende Reflexionen von den Wänden und vom Fußboden nach Möglichkeit zu beseitigen. Eine Ausmessung des Strahlungsfeldes — ohne Zylinder natürlich — ergab in der Tat, daß dasselbe *vollkommen störungsfrei* war.

Die *Beobachtungsmethode* war folgende: Zunächst wurde die *freie* Strahlung gemessen, dann ein Zylinder in der vorher beschriebenen Weise in den Strahlengang gebracht, die dann vorhandene Energie gemessen, und schließlich noch einmal die freie Strahlung untersucht. Aus diesen alternierenden Beobachtungen wurde dann die nach Einschaltung des Zylinders resultierende Strahlung in Prozentsen der freien Strahlung berechnet. Diese Messungstripel wurden dreimal wiederholt und aus den so gewonnenen Zahlen das arithmetische Mittel als Endresultat genommen.

B. Beobachtungen und Resultate.

Wie schon erwähnt, wurden die Zylinder in der Weise hergestellt, daß Wasser in möglichst dünnwandige Glasrohre eingefüllt wurde. Diese letzteren waren im leeren Zustande vollkommen wirkungslos. Um das für den Betrag der Störung maßgebende Verhältnis ρ/λ von geeigneter Größe zu erhalten und dabei gleichzeitig noch die Erscheinungen für variables λ prüfen zu können, schwankten die Radien der Wasserzylinder in den Grenzen von 0,1 bis 1,5 cm; gleichfalls wurden die Versuche mit zwei verschiedenen Wellenlängen — 24 cm und 58 cm — angestellt; in einigen besonderen Fällen trat noch eine dritte Wellenlänge, $\lambda = 34$ cm, hinzu.

Was den Vergleich der durch den Versuch gewonnenen Resultate mit den berechneten Werten angeht, so ist zu bemerken, daß die Bedingungen des Experimentes von denen der Theorie sich insofern unterscheiden, als wir mit *gedämpften* Wellen zu operieren gezwungen sind,* während die Rechnung

ungedämpfte voraussetzt. Außerdem treten bei der größeren Wellenlänge und in unmittelbarer Nähe des Zylinders gewisse Abweichungen zwischen den theoretischen und experimentellen Befunden auf, die davon herrühren, daß das Meßinstrument selbst das zu messende Strahlungsfeld ändert. Es liegen hier im Prinzip genau dieselben Verhältnisse vor, wie bei der Messung der elektrischen Feldstärke durch eine Probeladung. Außerdem hat es an einigen Stellen den Anschein, als ob auch „Koppelungen“ zwischen Zylinder und Thermoelement aufträten, wenn sie in großer Nähe voneinander befindlich sind. In diesen Fällen erleiden die Kurven gewisse Verzerrungen, die zum Teil nicht unbedeutend sind; jedoch ist diese prinzipiell nicht zu vermeidende Fehlerquelle in größerer Entfernung des Thermoelementes vom Zylinder ganz geringfügig.

Für den Fall $\varphi = 0$ ergab das Experiment folgendes:

Die Zylinder wurden in einer Entfernung von 3 m von dem Erreger in den Strahlengang gebracht; zwischen ihnen und dem Erreger befand sich der Empfänger. Die Resultate sind für eine Wellenlänge $\lambda = 24$ cm und der Wert $\varphi = 0,15$ cm, 0,30 cm, 0,34 cm, 1,21 cm in Fig. 12a—d niedergelegt. — Da für $\lambda = 58$ cm sich gleiche Resultate ergeben, so erübrigt sich eine besondere Zeichnung.

Ein Vergleich dieser Kurven mit den für gleiche Werte von φ und λ berechneten von Fig. 2, läßt in folgenden Punkten volle Übereinstimmung erkennen:

1. es sind stehende Wellen vor dem Zylinder vorhanden;
2. die Entfernung von Maximum zu Minimum beträgt $\lambda/4$;
3. die Lage der Maxima und Minima stimmt mit der berechneten überein;
4. die Interferenzstreifen zeigen die von der Theorie geforderte Verschiebung mit variablem φ ;
5. die Intensität der Interferenzen variiert ebenfalls mit φ ;
6. die Interferenzen sind in bezug auf die Ordinate 100 Proz. asymmetrisch.

Nur in einem Punkte macht sich der oben erwähnte Einfluß der Dämpfung geltend, indem die „Sichtbarkeit“ (im

Michelsonschen Sinne) der beobachteten Interferenzen *geringer* ist, als die der berechneten: eine aus der Optik der Interferenzerscheinungen wohlbekannte Tatsache.

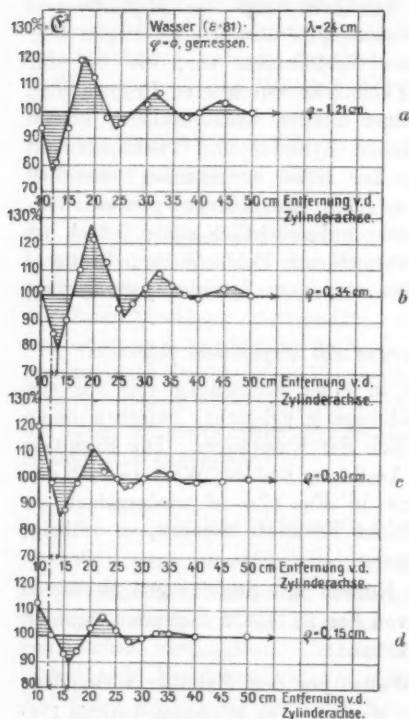


Fig. 12 a—d.

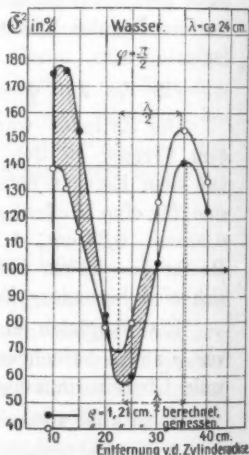


Fig. 13.

Der Fall $q = \pi/2$ unterscheidet sich von $q = 0$ im wesentlichen nur dadurch, daß die Abstände von Maximum zu Minimum der entstehenden Interferenzen nicht $\lambda/4$, sondern $\lambda/2$ sein sollen. Ein für einen Zylinder von 1,21 cm Radius und für eine Wellenlänge $\lambda = 24$ cm ausgeführter Versuch bestätigte diese Forderung der Theorie vollkommen, wie aus Fig. 13 ersichtlich ist.

Wegen der geringen Höhenausdehnung des Hohlspiegels

hätte das Thermoelement eigentlich nicht weiter als 30 cm von der Zylinderachse entfernt werden sollen; nur bis zu $r = 30$ cm gibt die durch *Kreise* bezeichnete Kurve der Fig. 13 die Vorgänge daher richtig wieder; zum Vergleich ist auch die theoretische Kurve hinzugefügt.

Im Falle $\varphi = \pi$ ergab das Experiment folgendes:

Der Zylinder befand sich hier in einer Entfernung von 150 cm vom Erreger. Für die Wellenlänge 24 cm ergeben sich die Resultate aus Fig. 14, in der die gemessenen und

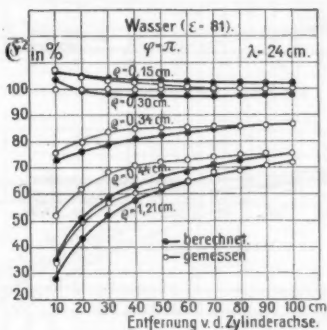


Fig. 14.

beobachteten Werte gleichzeitig eingetragen sind. Wir finden quantitativ nur geringe Abweichungen, die ganz wohl eine Folge der Dämpfung der ausfallenden Wellen sein können. Diese Abweichungen nehmen mit wachsendem ρ zu. Qualitativ dagegen stimmen die Ergebnisse mit den von der Theorie geforderten vollkommen überein. Die Kurve für $\rho = 0,15$ cm repräsentiert den Typus I, die für 0,3 cm den Typus III, während die übrigen dem Typus II angehören.

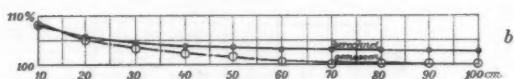
Das hier Gesagte gilt mutatis mutandis auch für die in Fig. 15a—f dargestellten Verhältnisse für $\lambda = 58$ cm, namentlich was den allgemeinen Charakter der Kurven angeht. Wir finden in Übereinstimmung mit der Theorie:

1. die bei kleinen Stabdicken sich zeigende Verstärkung der Strahlung (Typ I);
2. den Durchgang dieser Verstärkung durch ein Maximum bei größer werdendem ρ ;

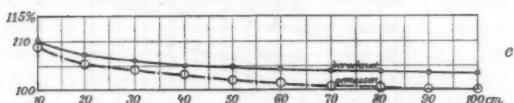
3. den allmählichen Übergang zur Schirmwirkung (Typ II);
4. den Durchgang einzelner Kurven durch die Ordinate der „freien“ Strahlung von 100 Proz. (Typ III);
5. das für die Kurven vom Typus II und III charakteristische Minimum.



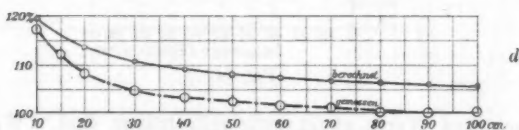
$$\lambda = 58 \text{ cm}, \varrho = 0,15 \text{ cm}, \varphi = \pi, \varepsilon = 81.$$



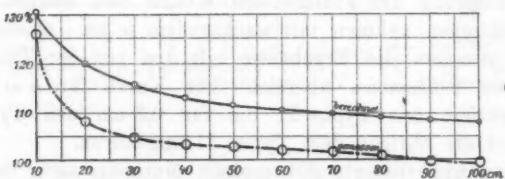
$$\lambda = 58 \text{ cm}, \varrho = 0,90 \text{ cm}, \varphi = \pi, \varepsilon = 81.$$



$$\lambda = 58 \text{ cm}, \varrho = 0,34 \text{ cm}, \varphi = \pi, \varepsilon = 81.$$



$$\lambda = 58 \text{ cm}, \varrho = 0,44 \text{ cm}, \varphi = \pi, \varepsilon = 81.$$



$$\lambda = 58 \text{ cm}, \varrho = 0,55 \text{ cm}, \varphi = \pi, \varepsilon = 81.$$

Fig. 15 a-e.

Eine Abweichung jedoch tritt bei dieser großen Wellenlänge auffallend hervor:

Es zeigt sich in den Kurven für $\varrho = 0,74, 0,98$ und $1,21$ cm in den Abständen von etwa 10–50 cm von der

Zylinderachse das Auftreten eines Maximums und Minimums. Diese Abweichung der Kurven von dem regelmäßigen Verlauf ist als eine Folge der vorerwähnten gegenseitigen Beeinflussung

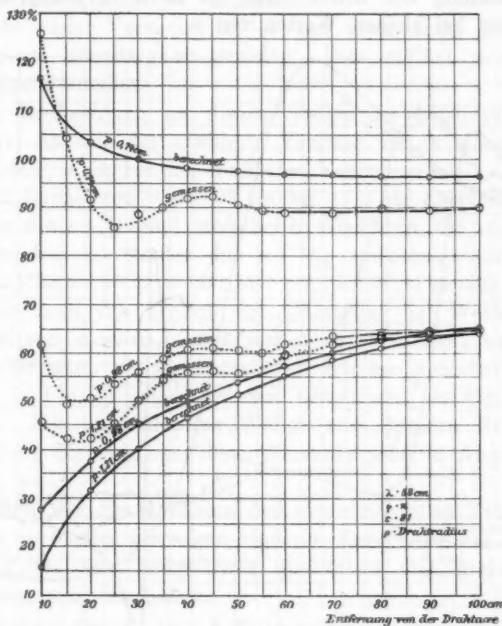


Fig. 15 f.

von Stab und Meßinstrument aufzufassen: es treten hier offenbar „Koppelungen“ auf, eine Auffassung, die noch durch besondere Versuche gestützt werden kann.¹⁾

Es wurden ferner Versuche ausgeführt, um \bar{G}^2 in der Entfernung $r = 10$ cm von der Zylinderachse als Funktion von ρ zu messen, und zwar für die Wellenlängen 24 cm, 34 cm, 58 cm. Die Ergebnisse sind in Fig. 16, gleichzeitig mit den Berechnungen, graphisch dargestellt.

¹⁾ Vgl. hierzu die betreffenden Ausführungen in der Dissertation von F. Grossmann.

Ein Vergleich zwischen Rechnung und Beobachtung ergibt folgendes:

1. in Übereinstimmung mit der Theorie zeigt sich zunächst die Erhebung der Kurve über die Linie der ursprünglichen Helligkeit bei kleinen Werten von q ;

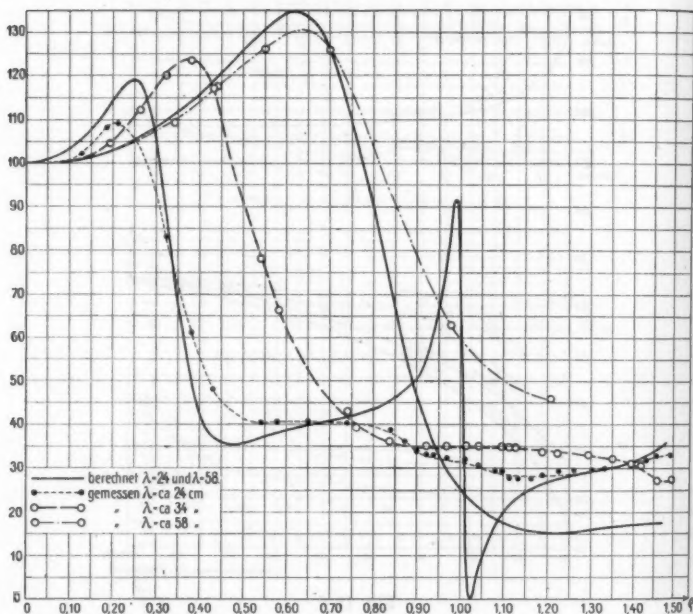


Fig. 16.

2. die Kurve passiert ein Maximum und schneidet abwärts gehend die Ordinaten 100 Proz.;

3. daran schließt sich ein rapider Abfall. Durch diese Beobachtungen unter 1. bis 3. ist gleichzeitig die Existenz der ersten Eigenschwingung nachgewiesen. Es ist dies der erste Fall, daß an dielektrischen Körpern Eigenschwingungen experimentell beobachtet sind;

4. die Kurven machen dann eine scharfe Biegung nach rechts, nehmen dann aber im Gegensatz zu der Theorie einen mehr horizontalen Verlauf, ohne an den Stellen der höheren

Eigenschwingungen das von der Theorie geforderte periodische Auf- und Absteigen zu zeigen. Immerhin ist eine gewisse Unregelmäßigkeit an den Stellen, an denen die Schwankung auftreten müßte, nicht zu verkennen.

Trotz vieler Versuche ist es uns noch nicht gelungen, hier bessere Resultate zu erzielen. Dies erklärt sich auch leicht folgendermaßen:

Die Beobachtung an diesen Stellen ist außerordentlich erschwert, da sich der erwähnte Vorgang nur in einem ganz engen Gebiet, z. B. bei den erwähnten Versuchen mit $\lambda = 24$ cm in dem Intervall von $\varrho = 0,99$ cm bis 1,02 cm abspielt. Nur sind aber die im Handel erhältlichen Glasrohre, die zu diesen Versuchen benutzt wurden, nie auf $\frac{1}{10}$ mm genau zu erhalten, vor allen Dingen nicht in der hier erforderlichen großen Weite. Außerdem muß der Einfluß der Dämpfung der Wellen sich dahin geltend machen, diese Stellen zu verflachen, aus dem gleichen Grunde, wie dies auch bei den beobachteten Interferenzen in Fig. 12 gegenüber den berechneten in Fig. 2 der Fall ist. Mit ungedämpften Wellen sind bessere Resultate zu erhoffen; die diesbezüglichen Versuche sind in Angriff genommen. —

Fassen wir die Resultate des experimentellen Teiles zusammen, so dürfen wir sagen, daß die Ergebnisse des theoretischen Teiles eine weitgehende qualitative und quantitative Bestätigung erfahren haben.

Breslau, Physik. Inst. d. Universität, im Dezember 1909.

(Eingegangen 7. Dezember 1909.)

2. Über *Ionenadsorption an fallenden Wassertropfen; von R. Seeliger.*

I. Einleitung.

Im Jahre 1902 veröffentlichte Hr. Schmauss in diesen Annalen eine Arbeit über die „Aufnahme negativer Elektrizität aus der Luft durch fallende Wassertropfen“. Das Resultat, zu welchem Schmauss gelangt, ist kurz folgendes: Wenn man durch Luft, die von Röntgenstrahlen ionisiert wurde, Wassertropfen fallen läßt, so nehmen diese aus ihr negative Elektrizität und zwar in ziemlich beträchtlicher Menge auf, sie kommen also am Ende ihrer Bahn negativ geladen an; fängt man sie dort auf, so zeigt das Auffangegefäß eine negative Aufladung. Während ein Tropfen durch die Luft fällt, werden infolge ihrer größeren Beweglichkeit negative Ionen in größerer Menge an ihn herantreten als positive und dort ihre Ladungen abgeben. Durch die Weiterbewegung des Tropfens werden dann die auf ihm gesammelten negativen Ladungen von den gleich großen positiven getrennt, die in der Umgebung infolge des nun herrschenden Überschusses positiver Ionen vorhanden sind. Man faßt diese und ähnliche Erscheinungen unter der Bezeichnung „Adsorption der Ionen“¹⁾ zusammen, und sie scheinen im Elektrizitätshaushalte der Atmosphäre eine nicht unbeträchtliche Rolle zu spielen, Es wurden nun die Versuche von Schmauss mehrfach dazu herangezogen²⁾, in ihrer Übertragung auf Regentropfen zur Erklärung luftelektrischer Fragen beizutragen. Da meines Wissens die Ergebnisse des genannten Autors noch nie nachgeprüft wurden, so möchte ich in folgendem kurz über einige

1) Ausführliches darüber sowie Literaturangabe bei Ebert, Jahrb. f. Elektronik 3. p. 61.

2) Z. B. bei Wilson, On Thunderstorm Electricity, Phil. Mag. p. 636. 1909.

Versuche berichten, die denselben Gegenstand behandeln und mich zu ganz anderen Resultaten geführt haben. Ich möchte jedoch gleich hier bemerken, daß eine etwa bis auf wenige Prozent genaue Messung der beobachteten Effekte wegen deren Kleinheit und wegen einiger experimenteller Schwierigkeiten, deren Überwindung mir trotz langer Bemühungen nicht möglich war, nicht gelungen ist. Dagegen konnte ich zeigen, daß die von Schmauss gefundenen Werte für die adsorbierten Mengen negativer Elektrizität sicher viel zu hoch sind, und die Größenordnung der tatsächlichen Werte innerhalb enger Grenzen angeben. Da das hier behandelte Problem wesentlich Interesse in seiner Anwendung auf die Fragen der Luftpolektrizität beansprucht und dabei stets eine Extrapolation von den Versuchen im Laboratorium auf die Verhältnisse in der freien Atmosphäre nötig sein wird, so schien es mir unnötig, eine noch größere Genauigkeit der Versuchsergebnisse anzustreben. Doch werde ich bei der Beschreibung der Versuchsanordnung die auftretenden Schwierigkeiten ausführlich diskutieren, um dadurch eine in dieser Richtung etwa weitergehende Untersuchung zu erleichtern.

Das Prinzip der Versuche ist ein äußerst einfaches. Aus einem Tropfapparat *T* (vgl. Fig. 1) fällt pro Minute durch einen

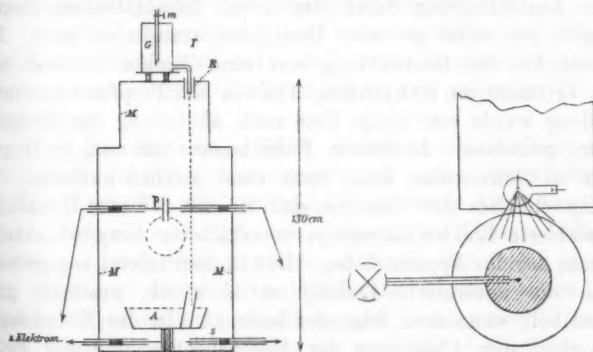


Fig. 1.

großen Blechzylinder *M* eine bestimmte Wassermenge in das mit dem Quadrantenelektrometer verbundenen Auffanggefäß *A*.

Die Luft, durch welche die Tropfen fallen, ionisierte ich ebenso wie Schmauss durch Röntgenstrahlen; die dem System $A +$ Elektrometer pro Minute mitgeteilte Ladung gibt dann — wenn man zunächst von störenden Nebeneffekten absieht — direkt die von dem herabfallenden Wasser adsorbierte Elektrizitätsmenge an. Dabei sind nun zwei wesentlich voneinander verschiedene Arten von Beobachtungen zu unterscheiden. Man kann einmal die Größe der aufgenommenen Ladung messen, wenn die Röntgenröhre während des ganzen Versuches in Gang bleibt. Dann fallen die aufeinanderfolgenden Tropfen stets durch Luft von relativ hoher Ionendichte; jeder Tropfen findet an jedem Punkte seines Weges dieselbe Menge positiver und negativer Ionen vor wie der vorhergehende, d. h. von einer „Ausionisierung“ im Sinne von Schmauss kann keine Rede sein, da von den Röntgenstrahlen stets neue Ionen nachgebildet werden. In diesem Falle fand ich nun nach Elimination sämtlicher störender Nebeneffekte eine geringe negative Ladung der aufgefangenen Tropfen. Es scheint mir dieser Versuch deshalb wichtig, weil er den bei einem in der Atmosphäre fallenden Regen herrschenden Umständen, wenigstens was die qualitative Seite anlangt, entsprechen dürfte. Auch hier haben wir es mit einem beständig wirkenden Ionisator zu tun, so daß eine Ausionisierung durch die ersten herabfallenden Regentropfen nur unter gewissen Umständen stattfinden kann. Die zweite Art der Beobachtung war eine direkte Wiederholung der Versuche von Schmauss. Die von den Tropfen adsorbierte Ladung wurde erst einige Zeit nach Abstellung der Röntgenröhre gemessen. In diesem Falle konnte ich nun, im Gegensatz zu Schmauss, keine Spur einer solchen auffinden. Es entspricht dies der Tatsache, daß die unter diesen Umständen adsorbierte Elektrizitätsmenge unterhalb der Empfindlichkeitsgrenze meines Apparates lag. Daß in dem zuletzt angegebenen Fall die adsorbierte Ladung so klein ist, erscheint ganz plausibel, wenn man folgendes bedenkt. In der Zwischenzeit zwischen der Abstellung der Röntgenröhre und der Beobachtung vermindert die Rekombination der Ionen die Ionendichte in dem von den Tropfen durchfallenen Raum ganz beträchtlich, so daß wir es mit viel kleineren Ionendichten zu tun haben als im ersteren Fall. Die ersten herabfallenden

Tropfen werden nun zwar sicher eine geringe Ladung adsorbieren, doch wird diese bei den folgenden schnell abnehmen, da eine Nachlieferung neuer Ionen nun nicht mehr stattfindet. An eine solche in genügendem Maße infolge der Diffusion der Ionen kann bei der geringen Diffusionsgeschwindigkeit (Diffusionskoeffizient für feuchte Luft = 0,033) wohl kaum gedacht werden.

II. Fehlerquellen.

Die tatsächlich beobachtete Aufladung des Auffanggefäßes stellt nun in Wirklichkeit keineswegs die von den herabfallenden Tropfen adsorbierte Ladung dar. Vielmehr überlagern sich über diesen eigentlichen „Adsorptionseffekt“ drei andere Effekte, die gesondert betrachtet und eliminiert werden müssen. Diese sind:

1. „Der Water-Dropperseffekt“ (einer Bezeichnung Lord Kelvins folgend). Wir wollen so einen Effekt nennen, der bei der Lostrennung der Tropfen von der Abtropfstelle entsteht und in einer den Tropfen von Anfang an beigegebenen Eigenladung besteht. Je nach dem Vorzeichen dieser Ladung wird also dieser Effekt die von den Tropfen mit herunter gebrachte und gemessene Ladung größer oder kleiner erscheinen lassen, als die, welche sie erst auf ihren Weg durch das ionisierte Gas infolge der Adsorption erhalten.

2. „Der Lenardeffekt“ tritt beim Auffallen des Wassers auf das Auffanggefäß auf.¹⁾ Bei Verwendung von Münchener Leitungswasser erhält dieses dadurch eine schwache positive Aufladung.

3. „Der Aufladungseffekt“. Zwischen dem Auffanggefäß und dem, die ganze Anordnung nach außen abschließenden großen Blechgefäß *M*, wird stets, auch wenn beide aus demselben Material gefertigt sind, eine kleine Potentialdifferenz bestehen. Diese wird bewirken, daß sich das Gefäß je nach der Richtung dieser Potentialdifferenz in dem einen oder anderen Sinne auflädt, sobald in dem Raum zwischen beiden freie Ionen vorhanden sind. Je nach der Ionendichte wird diese Aufladung schneller oder langsamer vor sich gehen, jedenfalls aber zu der vom Elektrometer angezeigten gesamten Auf-

1) P. Lenard, Wied. Ann. 46. p. 584. 1892.

ladung einen Beitrag liefern, der keineswegs vernachlässigt werden darf. Weitere störende Effekte, die etwa durch die auf A auffallenden Röntgenstrahlen und die dadurch bedingte Aussendung von Elektronen hervorgerufen werden, kommen nicht in Betracht, da es stets nur auf die Beobachtung von Differenzen ankommt, bei denen derartige Wirkungen herausfallen.

III. Versuchsanordnung.

Der von mir benutzte Apparat bestand im wesentlichen aus einem gut isolierten Auffangegefäß A , das zum Schutze von einem großen Blechkasten M aus demselben Material (Weißblech) umgeben war, und aus einer Tropfvorrichtung T , von der aus Wasser nach A herabfiel. Das Gefäß A war durch eine sorgfältig elektrostatisch geschützte Leitung mit dem Quadrantenelektrometer verbunden, dessen Empfindlichkeit 370 mm pro 1 Volt bei 3 m Skalenabstand betrug. Vor und nach jeder Versuchsreihe wurde die Empfindlichkeit mit Hilfe einer Sonde s nachkontrolliert; dieselbe Sonde konnte auch dazu dienen, um dem System Auffangegefäß + Elektrometer eine bestimmte Ladung mitzuteilen. In der Mitte des Blechkastens M war ein Plattenkondensator p angebracht; die eine Platte konnte mit dem Elektrometer, die andere mit einer Hochspannungsbatterie verbunden werden, so daß man den Sättigungsstrom zwischen den Platten und damit die Stärke des wirkenden Ionisators messen konnte. Alle vorkommenden Isolationen waren aus den, bei luftelektrischen Untersuchungen allgemein üblichen gerieften Hartgummiträgern mit Natriumtrocknung gebildet und haben sich stets sehr gut bewährt, obwohl wegen der in M vorhandenen hohen Feuchtigkeit große Anforderungen an sie gestellt wurden.

1. Die meisten Schwierigkeiten machte die Konstruktion eines geeigneten Tropfapparates. Es handelte sich darum, in das Gefäß A eine bestimmte Wassermenge oder eine bestimmte Anzahl von Tropfen konstanter Größe herunterfallen zu lassen. Die pro Minute herabfallende Menge konnte leicht konstant gehalten werden, da das Gefäß G als Mariottesche Flasche ausgebildet war. Ein Mikrometerhahn m , welcher den Luftzutritt regelte, erlaubte die gewünschte Ausflußmenge sehr

genau einzustellen. Denken wir uns nun den Tropfapparat in Tätigkeit gesetzt, so daß etwa eine bestimmte Anzahl von Tropfen pro Minute (gewöhnlich 200) herabfällt und von dem Gefäß *A* aufgefangen wird. Wenn nun *T* mit der Erde oder mit *M* leitend verbunden ist, so wird jeder Tropfen eine bestimmte Elektrizitätsmenge *s* mit herunterbringen; denn da zwischen der aus Metall hergestellten Ausflußkapillare und den Metalloberflächen der Umgebung (es kommt hier wohl in erster Linie die Oberfläche einer Röhre *R* in Betracht, durch welche die Kapillare zum Schutz gegen Luftströmungen und dergl. hindurchgeführt ist) stets eine kleine Potentialdifferenz besteht, so wird der ganze Apparat wie ein Tropfkollektor wirken, nur mit dem Unterschiede, daß die von jedem einzelnen Tropfen fortgeführte Ladung sich nicht asymptotisch dem Werte Null nähert, wie dies bei isoliertem Ausflußgefäß der Fall sein müßte.¹⁾ Da man nun in der Literatur häufig derartige Tropfkollektoren verwendet findet²⁾, möchte ich in folgendem zunächst auf einige Erscheinungen eingehen, die bei ähnlichen Versuchsanordnungen sehr wohl zu bedeutenden Fehlerquellen Veranlassung geben könnten. Zunächst ist klar, daß das Vorzeichen und die Größe der Tropfenladung *s* von dem Material der Tropfkapillare *S* und dem des umgebenden Rohres *R* abhängen werden. Bei Benutzung verschiedener Metalle ergeben sich so z. B. die folgenden Werte (in willkürlichen Einheiten).

<i>R</i>	Messing			Zink
<i>S</i>	Kupfer	Zinn	Zink	Zinn
<i>s</i>	-37	+30	+77	-90

Man sieht, daß die aus dieser kleinen Tabelle sich ergebende Anordnung der Metalle genau die der Spannungsreihe ist. Das Arbeiten mit nicht isoliertem Tropfapparat würde also ein sehr bequemes Mittel bilden, um den Tropfen von

1) Vgl. z. B. F. G. H. Linke, Diss. Berlin 1901.

2) Z. B. Ch. Nordmann, Compt. rend. 138. p. 1418 u. 1596. 1904; 140. p. 430. 1905.

Anfang an eine bestimmte Eigenladung zu erteilen und so den Einfluß dieser etwa auf die Größe der Adsorption zu untersuchen. Doch steht dem ein Mißstand gegenüber, den ich trotz langer Bemühungen nicht beheben konnte. Die Größe von ϵ bleibt nämlich nicht konstant, sondern ändert sich mit der Dauer des Abtropfens stetig, um einem dann konstant bleibenden Endwert zuzustreben. Doch wechselte sowohl die Geschwindigkeit der Änderung wie auch die Größe dieses Endwertes von Versuch zu Versuch in ganz unkontrollierbarer Weise trotz aller erdenklichen Vorsicht. (So hatte z. B. auch eine starke Vergoldung der Tropfspitzen keinen Erfolg.) Diese Inkonstanz der Tropfenladung scheint mir auf einer geringen Veränderung der in Betracht kommenden Metalloberflächen zu beruhen. So änderte sich z. B. ϵ sprungweise um etwa 30 Proz., wenn die Endkuppe der Kapillare leicht mit etwas Watte abgewischt wurde. Es kann dies nicht verwundern, wenn man die große Empfindlichkeit des Voltaeffektes gegen geringste Veränderungen der in Betracht kommenden Oberflächen bedenkt.¹⁾

Da ich nun bei meinen Versuchen voraussetzen mußte, daß der Wert von ϵ , d. h. der unter II. erwähnte Water-Droppereffekt zum mindesten während eines Versuches konstant bleibt, so war ich gezwungen mit isoliertem Tropfgefäß zu arbeiten. Paraffin erwies sich dabei leider als Isolationsmittel als unbrauchbar wegen seiner großen Empfindlichkeit gegen Druck und Reibung, die sich beim Aufsetzen der Mariotteschen Flasche und beim Einstellen des Mikrometerhahnes nie ganz vermeiden lassen. Ich benutzte schließlich ein Metalltischchen mit drei aus gerieften Ebonitsäulen bestehenden Füßen. Endlich erwies es sich als notwendig, die ganze Tropfanordnung gegen äußere elektrostatische Einflüsse durch einen geerdeten Drahtkäfig zu schützen, der zum Schutz gegen die Röntgenstrahlen allseitig mit Blei umkleidet war. Bei Ausführung der Versuche zeigte es sich nun, daß der Water-Droppereffekt nach Ingangsetzung des Apparates sehr schnell kleiner wurde, daß er jedoch nicht bis auf Null her-

1) Vgl. A. Winkelmann, Handb. 4. p. 178 f.; oder als besonders typisches Beispiel W. Hallwachs, Wied. Ann. 29. p. 1. 1886.

untersank, wie dies bei vollständiger Isolation hätte sein müssen, sondern daß ein konstanter, wenn auch sehr kleiner Endwert erreicht wurde. Ich glaube dies durch nicht vollständige Isolation des Tropfgefäßes, oder durch das Bestehen eines Ionenstromes zwischen der metallenen Mariotteschen Flasche und dem umgebenden Drahtnetz erklären zu können.

2. Den beim Auffallen der Tropfen bestehenden Lenardeffekt konnte ich auf ein Minimum herabdrücken, dadurch, daß ich die Tropfen in ein schräggestelltes Rohr fallen ließ. Sie trafen etwa 5 cm unterhalb der oberen Rohrmündung dessen Wand und glitten an derselben, ohne in nennenswerter Weise zu zerspritzen, hinab in das größere Sammelgefäß. Viel günstiger als die Verwendung von destilliertem Wasser, das trotzdem einen nicht unbeträchtlichen Lenardeffekt ergab, war die Benutzung von gewöhnlichem Leitungswasser.¹⁾ Bei diesem war die Aufladung infolge des Lenardeffektes jedenfalls verschwindend gering, wenigstens solange ich einzeln fallende Tropfen benutzte. Später habe ich wie Schmauss einen kontinuierlichen Wasserstrahl benutzt, der sich erst auf seinem Wege in einzelne Tropfen auflöste, und in einem Blechzylinder mit Drahteinlagen aufgefangen wurde. Es ergab sich für diesen Fall ein geringer, jedoch durchaus konstanter Betrag für den Lenardeffekt. Die Kapazität der ersten Auffangevorrichtung zusammen mit der des Elektrometers und der Zuleitung war 65,0 cm, die der zweiten Anordnung ebenso 98,9 cm (bestimmt mit dem Harmsschen Kondensator durch Ladungsteilung).

Zum Schlusse möchte ich noch bemerken, daß die Röntgenröhre und das dieselbe speisende Induktorium in einem großen bleibeschlagenen Kasten untergebracht war. Ein Fenster gestattete den Austritt der Strahlen. Das Elektrometer war außerdem durch mehrere dicke Bleischirme und durch ein gerichtetes engmaschiges Drahtnetz geschützt. Es wurde durch den Betrieb der Röntgenröhre in keiner Weise beeinflusst.²⁾

1) Ähnliches bemerkt Lenard für das Bonner Leitungswasser l. c.

2) Daß die Strahlung den ganzen Kasten annähernd homogen erfüllte, stellte ich durch Abtasten mit einem Fluoreszenzschirm fest.

IV. Gang und Resultat der Versuche

1. *Versuche bei dauernder Bestrahlung.* — Es handelte sich zunächst darum, die von einem Tropfen adsorbierte negative Ladung zu bestimmen, wenn dieser Tropfen durch Luft fiel, die während des ganzen Versuches von Röntgenstrahlen ionisiert wurde. Es tropften pro Minute 200 Tropfen ab, der Radius jedes Tropfens war 0,25 cm, die Fallhöhe betrug 90 cm. Der Gang eines jeden Versuches war der folgende. Zunächst wurde bestimmt, welche Ladung dem Auffangegefäß durch die Tropfen mitgeteilt wurde, wenn die Luft im Kasten *M* nicht künstlich ionisiert war. Diese Aufladung war hervorgerufen durch die Überlagerung der drei Effekte, die unter II. angegeben sind. Der Aufladungseffekt war nämlich infolge der in einem geschlossenen Raum stets vorhandenen, wenn auch schwachen, natürlichen Ionisation noch bemerkbar, wenn die Röntgenröhre nicht in Tätigkeit war. Stellte man den Tropfapparat ab, so konnte der Betrag des letzteren Effektes für sich bestimmt werden. Man erhält so die Ladung, welche 200 Tropfen an das Auffangegefäß abgeben + der Ladung infolge des Lenardeffektes.

Wurde nun die Röntgenröhre in Tätigkeit gesetzt, so wanderte die Nadel erst schnell, dann mit stetig abnehmender Geschwindigkeit einer Grenzlage zu, welche also direkt die Potentialdifferenz zwischen dem Auffangegefäß und dem Mantel *M* angibt. Wenn nun der Tropfapparat in Tätigkeit gesetzt wurde, so mußte sich, falls die Tropfen eine negative Ladung mit herunterbrachten, die Nadel nun von neuem, und zwar nach der negativen Seite hin verschieben. Der Betrag dieser Verschiebung zeigte an, welche Ladung dem Auffangegefäß nun von den 200 Tropfen und infolge des Lenardeffektes mitgeteilt wurde. Unter der Annahme, daß der letztere konstant geblieben war, ergibt die Differenz dieser und der oben (ohne künstliche Ionisation) erhaltenen Aufladung, die durch die 200 Tropfen adsorbierte Elektrizitätsmenge. Um zu bestimmen, welche pro Minute dem System mitgeteilte Ladung dieser neuerlichen Nadelverschiebung entspricht, haben wir uns folgendes klar zu machen: Wenn die Nadel ihre erste Ruhelage erreicht hat, so ist die Potentialdifferenz zwischen *A* und *M*

nahezu ausgeglichen. Die geringe noch bestehende Differenz unterhält einen Ionenstrom zwischen diesen beiden Metallflächen, der eben hinreicht, dem kleinen Ladungsverlust durch unvollkommene Isolation das Gleichgewicht zu halten. Der Aufladungseffekt ist also fast Null. Wenn nun die Nadel nach Ingangsetzung des Tropfapparates sich in einer neuen Lage einstellt, so muß offenbar die Beziehung gelten:

Lenardeffekt + pro Minute von den Tropfen mitgebrachte

Ladung = Aufladungseffekt + Isolationsverlust.

Wenn wir also die Zerstreuungskurve¹⁾ aufnehmen und an sie in dem der zweiten Ruhelage des Elektrometers entsprechenden Punkte die Tangente legen, so können wir den Betrag der rechten Seite obiger Gleichung bestimmen. Die „Zerstreuungskurve“ ergibt sich, wenn man A mittels der Sonde (auf etwa 1 Volt) auflädt und nun den Rückgang der Ladung etwa von 15 zu 15 Sek. notiert. Um das eben Gesagte klarer zu machen, möchte ich noch einen beliebig herausgegriffenen Versuch in extenso mitteilen:

1. Ohne Tropfen und ohne Strahlen.

Zeit in Min.	Ausschlag
0	500
1	502
2	505,0
3	508,0
4	510,5
5	513,0

Mittl. Aufladung }
pro Min. } 2,6

2. Mit 200 Tropfen und ohne Strahlen.

Zeit in Min.	Ausschlag
0	500,0
1	507,0
2	514,0
3	520,5
4	527,5
5	533,5

Mittl. Aufladung }
pro Min. } 6,7

Es ist also ohne künstliche Ionisation die von 200 Tropfen verursachte Aufladung + Lenardeffekt gleich $6,7 - 2,6 = 4,1$ Skt. pro Minute.

1) Es sei hier bemerkt, daß „Aufladung“ und „Zerstreuung“ natürlich identisch sind und die eine oder andere Bezeichnung nur gewählt ist, je nachdem der damit gemeinte Effekt die bereits vorhandene Ladung des Auffangegefäßes vergrößert oder verkleinert.

3. Ohne Tropfen und mit Strahlen.

(Erste Ruhelage der Nadel.)

(Nullpunkt 500,0)

567,0

4. Mit 200 Tropfen und mit Strahlen.

(Zweite Ruhelage der Nadel.)

(Nullpunkt 500)

569,5

5. Zerstreuungskurve.

Zeit in $\frac{1}{4}$ Min.	Ausschlag
0	650
1	584,0
2	570,5
3	568,0
4	567,0
5	567,0

Die graphische Auswertung gibt einen Zerstreuungseffekt von 12,6 Skt. pro Minute (im Punkte 569,5), welcher entgegengesetzt gleich ist dem „Aufladungseffekt“.

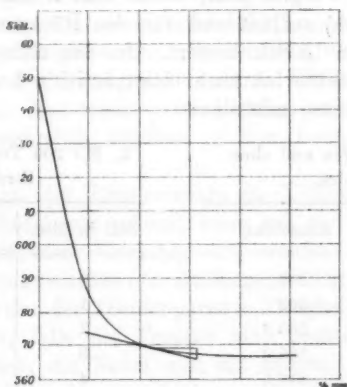


Fig. 2.

Die Adsorption würde also bei diesem Versuch eine Aufladung von $12,6 - 4,1 = 8,5$ Skalenteilen pro Minute hervorrufen.

Als Mittelwert aus zahlreichen Versuchen ergab sich hierfür der Wert von 12,5, das entspricht einer Elektrizitätsmenge von $7,3 \cdot 10^{-3}$ st. Einh. oder von etwa $2 \cdot 10^7$ Ionenladungen, welche also die 200 Tropfen adsorbiert hatten.

Die Resultate der einzelnen Versuche weichen nicht unerheblich voneinander ab. Bedenkt man, daß eine geringe

Änderung der Potentialdifferenz $A-M$ die Zerstreuungskurve schon bedeutend deformieren wird, daß ferner die Intensität der Röntgenstrahlen bei den einzelnen Versuchen nicht unerheblich schwankte, so kann obiges Resultat nicht mehr als die Größenordnung des zu messenden Effektes angeben.

Die Messung der Ionendichte (aus dem Sättigungsstrom und der Beziehung für den stationären Zustand

$$n_0 = \sqrt{\frac{q}{\alpha}} \quad (\alpha = 1,2 \cdot 10^{-6})$$

ergab im Mittel $1,3 \cdot 10^6$ Ionen pro ccm. Die 200 Tropfen adsorbierten eine Elektrizitätsmenge entsprechend der Ladung von $2 \cdot 10^7$ negativen Ionen. Dies wird vielleicht anschaulicher durch die folgende Angabe: Da die Fallhöhe der Tropfen 90 cm betrug, so wurden von den, in einer Säule vom Querschnitt der Tropfen und von der angegebenen Höhe vorhandenen Ionen, von jedem Tropfen also etwa 0,5 Proz. adsorbiert.

Ich möchte hier jedoch kurz auf folgendes hinweisen. Man wird im Falle der ständig wirkenden Strahlung nicht direkt die in der Luft vorhandene Ionendichte, wie sie sich aus der Messung des Sättigungsstromes im Plattenkondensator ergibt, in Verbindung bringen dürfen mit der adsorbierten Ionenmenge, sondern es werden bei diesen Versuchen vermutlich weit höhere Ionendichten in Betracht kommen. Der Vorgang der Ionenadsorption spielt sich, wie dies Ebert l. c. ausführlich zeigt, in einer Luftschicht ab, welche der adsorbierenden Oberfläche unmittelbar anliegt. Wird nun ein herabfallender Wassertropfen von den Röntgenstrahlen getroffen, so ist die Ionisation in seiner unmittelbaren Umgebung infolge der von ihm ausgehenden Sekundärstrahlen jedenfalls viel stärker als die von den primären Strahlen allein im freien Luftraum hervorgebrachte Ionisation, zumal da ja die Sekundärstrahlen bekanntlich besonders stark absorbiert werden und ionisieren. Es würde sich wohl lohnen, diese Verhältnisse an Tropfen aus verschiedenen Flüssigkeiten genauer zu untersuchen.

Der Effekt mußte sich vergrößern lassen durch Vermehrung der herabfallenden Tropfen. Ich ließ deshalb nun

nicht mehr einzelne Tropfen aus der Tropfspitze austreten, sondern einen zusammenhängenden Strahl (40 ccm pro Minute), der sich einige Zentimeter unterhalb der Abtropfstelle in einzelne Tropfen auflöste. Das herabfallende Wasser wurde aufgefangen von dem oben erwähnten größeren Blechzylinder. Auf diese Weise wurden Werte für die adsorbierte Elektrizitätsmenge erhalten, die etwa dreimal so groß waren als die oben angegebenen; doch können die beiden Resultate nicht weiter miteinander verglichen werden, da hier über die Größe und Anzahl der Tropfen nichts bekannt ist.

2. *Versuche nach Abstellung der Strahlungsquelle.* Eine zweite Reihe von Versuchen war denen von Schmauss nachgebildet. Da die zu erwartende Wirkung jedenfalls sehr klein war, arbeitete ich von vornherein in der eben angegebenen Weise mit einem kontinuierlichen Wasserstrahl. Die Luft wurde längere Zeit ionisiert, bis sich ein stationärer Zustand eingestellt haben konnte. Die Beobachtung wurde erst 5 oder 15 Sek. nach Abstellung der Röntgenröhre begonnen, indem vom Beobachtungsplatz aus die Erdung des Quadrantelektrometers gelöst wurde.

Betrachten wir zunächst die Erscheinung, welche eintritt ohne Tätigkeit des Wasserstrahles. Der nun allein wirkende Aufladungseffekt verursachte eine Aufladung des Auffanggefäßes; doch nimmt dieser Effekt rasch ab, um in den bei natürlicher Ionisation, d. h. ohne vorangehende Bestrahlung, überzugehen. Die den aufladenden Ionenstrom tragenden Ionen werden nämlich soweit sie von der künstlichen Ionisation herrühren, sehr bald erschöpft sein; auf einen steilen Anstieg der Aufladung folgt ein stetig andauernder sehr schwacher, welcher der natürlichen Ionisation zuzuschreiben ist, und der andauert, bis die Potentialdifferenz $A - M$ ausgeglichen ist, was etwa 30 Min. in Anspruch nimmt. Die Aufladungskurve, wie sie in einem der Versuche erhalten wurde, ist dargestellt durch die Kurve Z (Fig. 3). Der Vorgang ist hier ein ganz anderer als bei dauernd in Tätigkeit bleibender Strahlungsquelle; in diesem Falle würden wir für die Aufladung eine ganz ähnliche Kurve erhalten. Während aber die Ursache für die Abflachung der „Aufladungskurve“ dabei die Abnahme der treibenden Potentialdifferenz zwischen A und M

ist, kommt in dem vorliegenden Falle (d. h. bei einem Versuch nach Abstellung der Röntgenröhre) nun in erster Linie die Erschöpfung des zur Verfügung stehenden Ionenvorrates als solche in Betracht; und zwar wird die Ionendichte schnell vermindert einmal durch die Wegführung der Ionen im aufladenden Ionenstrom und dann durch die stets wirkende Rekombination der Ionen.

Dabei ist jedoch nun folgendes zu beachten: Der erste steile Anstieg wird auf das Elektrometer ähnlich wie ein plötz-

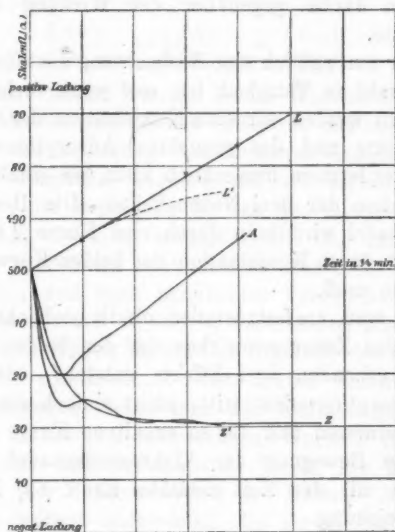


Fig. 3.

licher Stromstoß wirken; die aufeinanderfolgenden Nadelstellungen werden also nicht den Punkten der ausgeglichenen Kurve Z entsprechen, sondern einer oszillierenden Kurve Z' , die mit stetig abnehmender Amplitude um jene herumpendelt. (Diese Kurve Z' wurde erhalten durch Beobachtung von 5 zu 5 Sek.)

Beobachten wir nun ganz ebenso, wenn der Wasserstrahl in Tätigkeit ist, und wenn vorher nicht künstlich ionisiert wurde, so erhalten wir eine Kombination vom Lenard- und

Water-Droppereffekt. Die diesen beiden Effekten entsprechende Kurve ist die Kurve L . Wir haben also somit für sich allein Kenntnis von der Bewegung der Nadel: 1. infolge des Aufladungseffektes — Kurve Z' (Versuch ohne Wasserstrahl, bei vorheriger Ionisation) und 2. infolge des Lenard- und des Water-Droppereffektes — Kurve L (Versuch mit Wasserstrahl, ohne vorherige Ionisation). Zu dem letzteren ist noch zu bemerken, daß der auch in diesem Falle vorhandene Aufladungseffekt infolge der natürlichen Ionisation vollkommen vernachlässigt werden durfte gegenüber der Wirkung der beiden anderen Effekte.

Wenn wir nun endlich eine Beobachtung anstellen, während der Wasserstrahl in Tätigkeit ist, und wenn vorher bestrahlt worden war, so werden wir eine Kombination der drei störenden Nebeneffekte und des gesuchten Adsorptionseffektes erhalten. Ist der letztere unmerklich klein, so erhalten wir nur eine Kombination der drei Nebeneffekte. Die Bewegung der Elektrometernadel wird dann durch eine Kurve A beschrieben, die sich direkt durch Kombination der beiden Kurven Z' und L erhalten lassen muß.

Nun kann man, um festzustellen, ob die beobachtete Kurve A allein durch das Zusammenwirken der den beiden Kurven Z' und L entsprechenden drei Effekte entsteht, oder ob dazu noch der Adsorptionseffekt tritt, nicht einfach die Kurven Z' und L superponieren und die so erhaltene Kurve mit A vergleichen. Die Bewegung der Elektrometernadel unter dem Einfluß einer mit der Zeit *variablen* Kraft $f(t)$ ist gegeben durch die Gleichung

$$(1) \quad \frac{d^2 \alpha_1}{dt^2} + m_1 \frac{d \alpha_1}{dt} + m_2 \alpha_1 + m_3 f(t) = 0.$$

Das Integral dieser Gleichung ist, wenn δ und T in bekannter Weise Dämpfung und Schwingungsdauer charakterisieren und λ_1, λ_2 Wurzeln der Gleichung $\lambda^2 + m_1 \lambda + m_2 = 0$ sind, das folgende:

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha_1 = & \frac{m_3}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_0^t e^{-\delta(t-\xi)} \sin \frac{\pi}{T} (t-\xi) f(\xi) d\xi \\ & + \left(\frac{d \alpha_1}{dt} \right)_{t=0} \cdot \frac{T}{\pi} \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin \frac{\pi}{T} t. \end{aligned} \right.$$

Wir wollen nun annehmen, die Kraft $f(t)$ sei die bewegende Kraft etwa des Aufladungseffektes. Dann stellt uns α_1 direkt die Bewegung dar, welche durch die oben erhaltene Kurve Z' beschrieben ist. Ist ebenso $\varphi(t)$ die Kraft der beiden anderen Effekte, so ist die Kurve L durch einen ganz analogen Ausdruck α_2 gegeben, in dem nur an Stelle von $f(\xi)$ im ersten Integral natürlich $\varphi(\xi)$ steht. Wirken nun die drei Effekte zusammen, so entsteht eine Kurve A und man sieht ohne weiteres, daß das zugehörige α nur dann gleich $(\alpha_1 + \alpha_2)$ ist, wenn gilt

$$(3) \quad \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_{t=0} = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}\right)_{t=0} + \left(\frac{d\alpha_2}{dt}\right)_{t=0}.$$

Nur dann also dürfen wir die beiden Kurven Z' und L geometrisch addieren und können erwarten, daß die so erhaltene Kurve uns die Bewegung der Elektrometernadel gibt, wenn die drei Nebeneffekte zugleich auf sie wirken. Es ist nun sehr schwer, die Bedingung (3) aus den Kurven genau nachzuprüfen; daß sie nicht strenge erfüllt ist, zeigt schon der Verlauf der tatsächlich beobachteten Kurve A . Eine Messung von $(d\alpha/dt)_{t=0}$ und eine punktweise Vergleichen der beobachteten und der aus Z' und L berechneten Kurve ist jedenfalls recht kompliziert, da sie die Kenntnis der Konstanten in Gleichung (1) voraussetzt. Diese kleine Schwierigkeit kann man nun umgehen, wenn man den Aufladungseffekt so verändert, daß für die ihm entsprechende Kurve Z' $(d\alpha_1/dt)_{t=0} = 0$. Es gelang mir dies auf folgende Weise. In geringer Entfernung von der inneren Wand des Kastens M wurde eine Metallplatte isoliert aufgestellt, die durch ein Element im regulierbaren Nebenschluß auf positive Potentiale zwischen Null und 1 Volt aufgeladen werden konnte. Durch geeignete Wahl dieses Potentials konnte ich nun erreichen, daß $(d\alpha/dt)_0$ für den Zerstreuungseffekt in der Tat Null wurde. Es fließt dann von der Metallplatte nach einem Teil von A ein positiver Ionenstrom, der den nach den übrigen Teilen von A infolge der Potentialdifferenz $A-M$ fließenden negativen gerade aufwiegt. Diese Kompensation ist natürlich nur vollständig für $\alpha=0$, da der Zerstreuungseffekt von neuem auftritt, sobald das Auffangegefäß eine von Null verschiedene Ladung hat. Die Kapazität von A wurde durch die Metallplatte nur wenig

geändert. Wenn man nun den Wasserstrahl in Tätigkeit setzt, ohne vorher bestrahlt zu haben, so erhält man eine Gerade L . Stellt man dieselbe Beobachtung an, wenn vorher bestrahlt wurde, so erhält man eine Kurve L' mit *genau derselben Tangentenrichtung im Nullpunkt*. Die adsorbierte Elektrizitätsmenge ist also jedenfalls unterhalb der Empfindlichkeitsgrenze dieser Anordnung gelegen, was etwa 10^{-4} st. Einh. entspricht. Dabei ist außerdem zu beobachten, daß bei diesen Versuchen, wie anfangs angegeben, ein kontinuierlicher Wasserstrahl, also jedenfalls eine verhältnismäßig recht große adsorbierende Oberfläche benutzt wurde. Die allerersten herabfallenden Tropfen werden natürlich negative Elektrizität adsorbieren, allerdings wegen der geringeren Ionendichte weniger als im Falle der ständig wirkenden Röntgenstrahlen. Die folgenden Tropfen jedoch finden bereits, wie der Versuch zeigt, in ihrer Falllinie ionenarme Luft vor, d. h. es findet tatsächlich eine Ausionisierung statt.

V. Die Versuche von Schmauss.

Da ich, wie eben ausführlich gezeigt wurde, bei Beobachtung der nötigen Vorsichtsmaßregeln zu Resultaten von ganz anderer Größenordnung gelangt bin wie Schmauss, möchte ich noch kurz versuchen, zu erklären, wie Schmauss zu seinen Resultaten möglicherweise hat gelangen können. Die Größenverhältnisse des von Schmauss benutzten Apparates gehen aus der seiner Arbeit beigegebenen Figur hervor. Die Kapazität des Auffangegefäßes und des Elektrometers samt den Zuleitungen dürfen wir mindestens zu 100 cm annehmen. Schmauss findet nun im Maximum eine Aufladung von etwas mehr als 1 Volt, die in einer Minute durch den Wasserstrahl bewirkt wurde und die Schmauss durch Adsorption negativer Ionen zu erklären sucht. Eine einfache Überschlagsrechnung zeigt nun, daß dies Resultat viel zu groß sein muß. Nehmen wir intensive Röntgenstrahlung an, so waren nach Eintritt eines stationären Zustandes etwa 10^6 Ionen in ccm vorhanden. Schmauss beginnt seinen Versuch nach seiner Angabe mindestens 30 Sek. nach Abstellung der Röntgenröhre; er hatte dann infolge der in der Zwischenzeit wirkenden Rekombination noch höchstens

$3 \cdot 10^4$ Ionen pro ccm. Nehmen wir nun z. B. an, alle negativen Ionen, die in einem Zylinder von 1 qdm Grundfläche und von 60 cm Höhe (= größte Fallhöhe bei Schmauss) vorhanden waren, würden in einer Minute in das Auffangegefäß hineintransportiert werden, so hätten sie dieses auf etwa 0,2 Volt geladen. Es ist dies ein viel kleinerer Wert als der, welchen Schmauss für die Adsorptionswirkung angibt, dessen Resultat also offenbar viel zu groß.

Da ich nun bei meinen oben an letzter Stelle beschriebenen Versuchen ganz ähnliche Kurven (Kurve A) erhalten habe, wie die von Schmauss angegebenen, so vermute ich, daß sich diese eben durch den Aufladungseffekt erklären lassen; es ist dies auch der einzige der drei störenden Effekte, welcher in der zitierten Arbeit nicht erwähnt ist. Auf diese Weise lassen sich wohl auch alle anderen Versuche, die Schmauss zugunsten seiner Auffassung anführt, erklären. Stellen wir z. B. den Versuch in Kohlensäure an Stelle in Luft an, so wird wegen der nur etwa $\frac{1}{2}$ mal so großen Beweglichkeit der Ionen der Aufladungseffekt auch nur etwa halb so stark sein; dies wird also zur Folge haben, daß die im ganzen in einer Minute dem Auffangegefäß zugeführte Ladung in Kohlensäure bedeutend kleiner ist als in Luft. Ich habe einige orientierende Versuche in dieser Richtung angestellt und das eben Gesagte bestätigt gefunden. Auch die in Abschnitt II, 1, 2 der Schmauss'schen Arbeit beschriebenen Versuche kann man, wie ich glaube, ungezwungen auf ähnliche Weise erklären. Ganz dasselbe gilt für die unter 3 und 4 angegebenen Resultate; so wird z. B. der Aufladungseffekt durchaus nicht davon unabhängig sein, in welcher Lage innerhalb des schützenden großen Blechgefäßes das Auffangegefäß angebracht ist; ebenso wird sich der Water-Droppereffekt bei nicht isolierter Ausflußöffnung (wie dies bei Schmauss der Fall war) mit der pro Minute abfließenden Wassermenge ändern. Da ich bei diesen Betrachtungen jedoch auf bloße Vermutungen angewiesen bin, möchte ich dies nicht weiter ausführen, sondern am Schlusse nur konstatieren, daß Schmauss sicher nicht den reinen Adsorptionseffekt beobachtet hat, sondern eine Überlagerung dieses und der drei störenden Nebeneffekte.

Zusammenfassung.

Die Resultate der vorliegenden Arbeit sind also kurz folgende:

1. Wenn Wassertropfen durch ionisierte Luft fallen, so nehmen sie aus dieser geringe negative Ladung auf, jedoch in meßbarer Größe nur dann, wenn die ionisierende Röntgenstrahlung während des Herabfallens des Wassers fort dauert. Von einem einzelnen Tropfen werden etwa 0,5 Proz. der in der Falllinie vorhandenen negativen Ionen absorbiert.

2. Stellt man die ionisierende Röntgenröhre einige Zeit vor Beginn der Beobachtung ab, so läßt sich eine solche Adsorption nicht mehr nachweisen und zwar einmal wegen der geringen nun im Fallraum vorhandenen Ionenmenge und dann wegen der durch die ersten Tropfen erfolgenden Ausionisierung.

3. Es ist wahrscheinlich, daß in der an die adsorbierende Oberfläche unmittelbar angrenzenden Luftschicht, welche für die Adsorption allein in Betracht kommt, wegen der sekundären Röntgenstrahlen mit größeren Ionendichten zu rechnen ist als im freien Luftraum.

4. Die Resultate von Schmauss sind sicher viel, und zwar etwa 1000mal, zu groß. Sie lassen sich mit großer Wahrscheinlichkeit erklären durch die Nichtbeachtung der störenden Nebeneffekte.

Zum Schluß möchte ich auch hier Hrn. Prof. Ebert meinen besten Dank dafür aussprechen, daß er mir die Mittel seines Institutes in liebenswürdigster Weise zur Verfügung stellte und mich im Verlaufe der Arbeit stets durch seinen Rat unterstützte.

München, Physik. Inst. d. Techn. Hochsch., Dez. 1909.

(Eingegangen 23. Dezember 1909.)

3. Diskussion der Versuche über die träge Masse bewegter Elektronen; von W. Heil.

Es kann als experimentell erwiesen gelten, daß die träge Masse der Elektronen von ihrer Geschwindigkeit abhängig ist. Für die Art dieser Abhängigkeit kommen zwei Theorien in Betracht: die Lorentz-Einsteinsche „Relativtheorie“ und die Abrahamsche „Kugeltheorie“. Dieselben wurden schon mehrmals einer experimentellen Prüfung unterzogen, und zwar im Jahre 1906 durch Hr. W. Kaufmann¹⁾, 1908 durch Hr. A. H. Bucherer²⁾ und neuerdings durch Hr. E. Hupka.³⁾ Während Hr. Kaufmann zugunsten der Kugeltheorie entschied, kamen Hr. Bucherer und Hr. Hupka zu dem Schlusse, daß die Ergebnisse ihrer Messungen zugunsten der Relativtheorie sprechen. Besonders scheinen die Resultate Hr. Hupkas auf den ersten Blick eine glänzende Bestätigung der Relativtheorie darzustellen, mit der Kugeltheorie aber unvereinbar zu sein.

Die Betrachtungen des Hr. Hupka über die Genauigkeit seiner Resultate enthalten jedoch einen bemerkenswerten Irrtum. Es heißt auf p. 26 seiner Dissertation: „Der größte mögliche Fehler bei der Bestimmung des Potentials wird auf ± 80 Volt veranschlagt.“ Auf p. 40 heißt es, daß „nicht anzunehmen sei, daß die bei der Bestimmung des Entladungspotentials vorkommenden Fehler $\frac{1}{4}$ Proz. übersteigen.“⁴⁾ Die Deutung der Ablenkungsversuche zugunsten der Kugeltheorie

1) W. Kaufmann, Ann. d. Phys. 19. p. 497. 1906.

2) A. H. Bucherer, Physik. Zeitschr. 9. p. 755. 1908; Ann. d. Phys. 28. p. 585. 1909.

3) K. E. Hupka, Berliner Dissertation.

4) Ich mache darauf aufmerksam, daß es in einer „vorläufigen Mitteilung des Hr. Hupka im Heft 11 der Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. auf p. 254 nur heißt: „Der größte mögliche Fehler bei der Bestimmung des Potentials wird auf ± 1 Promille veranschlagt.“

würde aber einen Fehler von ca. 1 Proz. erfordern.“ Auf p. 37: „Die Annahme eines Fehlers von etwa 800 Volt in Verbindung mit einem bestimmten Fehlergesetz ermöglicht eine Deutung der Versuchsergebnisse im Sinne der Kugeltheorie.“

Es läßt sich aber leicht der Nachweis führen, daß schon die Annahme eines Fehlers von ± 80 Volt in Verbindung mit einem bestimmten Fehlergesetz eine Deutung von Versuchsergebnissen Hrn. Hupkas im Sinne der Kugeltheorie ermöglicht.

Die folgende Tab. I gibt gemäß Formel (22a) der Hupkaschen Dissertation zunächst die zu einigen äquidistanten Werten von β gehörigen Werte von P .

Tabelle I.

β	P	β	P
0,26	17919	0,41	47641
0,27	19389	0,42	50287
0,28	20926	0,43	53026
0,29	22529	0,44	55866

Während einer Messungsreihe wurde die Größe der Ablenkung bei variabler Potentialdifferenz durch passende Regulierung des Magnetstromes konstant gehalten. Es wurde aber nicht die Größe der magnetischen Ablenkungen berechnet und ihre Konstanz geprüft, sondern eine gewisse Funktion $C_{(\beta)}$, welche ebenfalls aus den Versuchsdaten berechnet werden kann und während einer Messungsreihe konstant bleiben muß.

Es ergaben sich z. B. aus der zweiten Messungsreihe folgende Resultate:

Tabelle II.

P	J Magnet- strom	β Kugel- theorie	β Relativ- theorie	$C_{(\beta)}$ Kugel- theorie	$C_{(\beta)}$ Relativ- theorie
19440	0,12983	0,270343	0,268883	2,1462	2,1502
•	•	•	•	•	•
•	•	•	•	•	•
53240	0,21825	0,430686	0,424906	2,1402	2,1508

Der Wert für $C_{(\beta)}$ in der Relativtheorie bleibt so gut wie konstant, während in der Kugeltheorie $C_{(\beta)}$ mit wachsender Potentialdifferenz abnimmt.

Ändert man nun die gemessenen Werte für die Spannung P in geeigneter Weise, aber so, daß sich die neuen Werte von den gegebenen um höchstens ± 80 Volt unterscheiden, so kann man es erreichen, daß auch die Werte für $C_{(\beta)}$ in der Kugeltheorie konstant ausfallen. Das geht aus der folgenden Tab. III hervor, die mit Hilfe der Tab. I und der Formel:

$$C_{(\beta)} = \frac{3}{4J} \cdot \frac{1}{\beta} \left(\frac{1+\beta^2}{2\beta} \ln \frac{1+\beta}{2-\beta} - 1 \right)$$

aufgestellt wurde. Rechnerisch sicherer ergibt sich $C_{(\beta)}$ aus der Reihe:

$$C_{(\beta)} = \frac{\beta}{J} \left(1 + \frac{2}{5} \beta^2 + \frac{9}{35} \beta^4 + \frac{12}{63} \beta^6 + \dots \frac{3n}{4n^2-1} \cdot \beta^{2(n-1)} \right).$$

Tabelle III.

P	J	β Kugeltheorie	$C_{(\beta)}$ Kugeltheorie
19440 - 80	0,12983	0,26981	2,1416 (2,1842)
59240 + 80	0,21825	0,43106	2,1423 (2,1860)

Die unter $C_{(\beta)}$ in Klammern eingeschlossenen Zahlen entsprechen dem Werte $\varepsilon/\mu_0 = 1,84 \cdot 10^7$, welcher sich aus den Kaufmannschen Messungen als der der Kugeltheorie günstigste Zahlenwert ergeben hat.¹⁾

Während also in Tab. II die Werte für $C_{(\beta)}$ in der Kugeltheorie mit wachsender Potentialdifferenz abnehmen, nehmen sie in Tab. III zu.

Bezeichnet ν die Zahl, welche angibt, um wieviel Prozent man irgend einen zu ein und derselben Messungsreihe gehörigen Wert für die Potentialdifferenz ändern muß, um das dazugehörige $C_{(\beta)}$ der Tabelle auf den Mittelwert $C'_{(\beta)}$ aller zu einer Messungsreihe gehörigen $C_{(\beta)}$ zu bringen, dann ist

$$\nu = \frac{200 \cdot J(C_{(\beta)} - C'_{(\beta)})}{\sqrt{P}} \sqrt{\frac{3 \cdot 10^9 c}{2 \cdot \eta_0}}.$$

1) Vgl. weiter unten p. 545 und W. Heil, Berliner Diss. März 1909.

Demnach ist zur Ausgleichung auf Konstante C_{ip} für die Hupkasche Tabelle:

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
$v \leq \frac{4}{10}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4.5}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{4}$

Hieraus geht hervor, daß die Deutung der Ablenkungsversuche zugunsten der Kugeltheorie in den Potentialmessungen einen Fehler von in einigen Fällen weniger als $\frac{1}{4}$ Proz., im ungünstigsten Falle aber weniger als $\frac{1}{2}$ Proz. erfordert. Da die Potentialmessungen um $\frac{1}{4}$ Proz. fehlerhaft sein konnten, so lag daher die *Feststellung des Unterschiedes in der Leistungsfähigkeit der beiden Theorien bei den Hupkaschen Messungen hart an der Grenze der Ausführbarkeit.*

Es wäre vielleicht doch zweckmäßiger gewesen, die absoluten magnetischen Ablenkungen wirklich zu messen. Dann hätte man prüfen können, ob für ein und dieselbe Theorie die magnetischen Ablenkungen nicht nur relativ zueinander, sondern auch *absolut* richtig sind. Denn wenn auch der relative Gang der der Prüfung der Theorien zugrunde gelegten Vergleichsgrößen den gestellten Anforderungen genügt, so reicht das zur Entscheidung zwischen den Theorien noch keineswegs aus, zumal wenn nur ein kleines Gebiet hoher Elektronengeschwindigkeiten erzielt werden kann. Was hätte z. B. die Feststellung für einen Wert, daß die eine Theorie das *relative* Verhalten der der Prüfung zugrunde gelegten Vergleichsgröße besser darstellt als die andere, wenn die aus *beiden* Theorien berechneten *absoluten* Werte der Vergleichsgröße von den beobachteten Werten um mehr als 10 Proz. abweichen (vgl. weiter unten)!

Die einzige Bemerkung, welche sich in der Hupkaschen Dissertation auf die Größe der erfolgten absoluten magnetischen Ablenkungen bezieht, findet sich auf p. 26. Es heißt daselbst, daß „die gesamte Ablenkung etwa 15–30 mm“ betrug. Wie mir Hr. Hupka mündlich versicherte, betrug die größte magnetische Ablenkung auf keinen Fall mehr als 30 mm. Überdies war eine größere mit dem Mikroskop beobachtete Ablenkung unmöglich, da der Halbmesser der Tube an dem Ende, wo sich der Phosphoreszenzschirm befand, genau 3 cm betrug.

Da Hr. Hupka das Magnetfeld ausgemessen hatte und mir die Messungsergebnisse freundlichst zur Verfügung stellte, so war es mir möglich, die absoluten magnetischen Ablenkungen nach beiden Theorien zu berechnen. Ich bin dabei zu dem überraschenden Resultat gelangt, daß die berechneten Werte der magnetischen Ablenkungen bei der Relativtheorie um ca. 10 bis $10\frac{1}{2}$ Proz., bei der Kugeltheorie um $10\frac{1}{2}$ bis 11 Proz. von den wirklich erfolgten Ablenkungen abweichen. Diese Verhältnisse ändern sich nicht wesentlich, wenn den Berechnungen auch wesentlich andere Werte für ϵ/μ_0 zugrunde gelegt werden als der Classensche Wert $1,77 \times 10^7$.

Der Anfangspunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems liege zwischen Kathode und Anode auf der Achse des Entladungsrohres 0,5 cm von der Kathode entfernt. (Die magnetische Feldstärke reichte in meßbarer Größe nämlich nicht bis ganz an die Kathode heran, sondern erstreckte sich nur bis zu einer Stelle, die ca. 0,5 cm von der Kathode entfernt lag.) Die Achse des Entladungsrohres sei x -Achse. Die z -Achse laufe parallel zur Achse des Spulenpaares NS . Die Entfernung der Anode A , des Diaphragmas D und des Phosphoreszenzschirmes P vom Anfangspunkt des Koordinatensystems werde mit a bzw. b und d bezeichnet. Es ist $a = 3$ cm, $b = 6,5$ cm und $d = 21,8$ cm.

ds bezeichne ein Element der Strahlenbahn, ϑ den Winkel, den irgend eine Tangente der Bahn mit der x -Achse bildet. ϑ_1 sowie s_1 und die magnetische Ablenkung y_1 mögen dem Punkte $x = d$ der Strahlenbahn entsprechen, s_0 dem Punkte $x = 0$. y_1 ist die zu bestimmende magnetische Ablenkung.

Es werde angenommen, daß infolge der Abweichung der elektrischen Kraftlinien an den Rändern des 4 mm weiten Diaphragmas A aus der zur Rohrachse parallelen Richtung keine in Betracht kommende elektrische Ablenkung erfolgt ist.

Bezeichnet man noch zur Abkürzung die rechten Seiten der Gleichungen (7) und (8) der Hupkaschen Dissertation mit Φ_β , dann ist für beide Theorien

$$\frac{1}{c} \cdot \eta_0 \oint \varrho = \Phi_\beta$$

und da

$$\varrho = \frac{ds}{d\vartheta},$$

$$(1) \quad \frac{1}{c} \eta_0 \int_{s_0}^s \frac{\mathfrak{S}}{\Phi_\beta} ds = \vartheta.$$

In dem in Betracht kommenden Bereich des Feldes kann \mathfrak{S} und Φ_β als Funktion von x allein betrachtet und \mathfrak{S} parallel zur z -Achse angenommen werden. Daher ist

$$(2) \quad \int_{s_0}^s \frac{\mathfrak{S}}{\Phi_\beta} ds = \int_0^x \frac{\mathfrak{S}}{\Phi_\beta} dx$$

und

$$(3) \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \vartheta.$$

Aus (3) ergibt sich

$$y = \int \operatorname{tg} \vartheta dx.$$

Folglich:

$$y_1 = \int_b^d \operatorname{tg} \vartheta dx,$$

oder in Reihenentwicklung:

$$(4) \quad y_1 = \int_b^d dx \left[\vartheta + \frac{\vartheta^3}{3} + \frac{2}{15} \vartheta^5 + \dots \right].$$

Aus (1) und (2) ergibt sich:

$$(5) \quad \vartheta = \frac{1}{c} \eta_0 \int_0^x \frac{\mathfrak{S}}{\Phi_\beta} dx.$$

\mathfrak{S} ist proportional dem Magnetstrom J und einem konstanten Reduktionsfaktor, der mit R bezeichnet werde. $\mathfrak{S} = RH$ entspreche dem Magnetstrom 1 C.G.S. Dann ist allgemein:

$$(6) \quad \mathfrak{S} = J R H.$$

H ist für alle Messungen ein und dieselbe Funktion von x .

Aus (5) und (6) ergibt sich:

$$\vartheta = \frac{1}{c} \cdot \eta_0 J R \int_0^x \frac{H}{\Phi_\beta} dx,$$

da Φ_β für $x > a$ konstant ist, so folgt wegen

$$\int_b^d \vartheta dx = \int_0^d \vartheta dx - \int_0^b \vartheta dx$$

$$(7) \left\{ \int_b^d \vartheta dx = \frac{JR\eta_0}{c} \left[(d-b) \int_0^a \frac{H}{\Phi_\beta} dx + \frac{d-b}{\Phi_\beta} \int_a^b H dx \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{1}{\Phi_\beta} \int_b^d dx \int_b^x H dx \right] \right\}.$$

Zur weiteren Behandlung der Gleichungen (4) und (7) ist es erforderlich, auf das Magnetfeld selbst einzugehen.

Die Ausmessung ergab für

x	H	x	H
0	0	6,0	91
0,5	0,75	6,5	122
1,0	2	7,0	164
1,5	2	7,5	189
2,0	4,5	8,0	228
2,5	8	8,5	273
3,0	12	9,0	311
3,5	17	9,5	344
4,0	25	10,0	373
4,5	35	10,5	344
5,0	54	11,0	311
5,5	61	usw.	usw.

Wenn $\xi = x - 10$, dann ist aus Symmetriegründen $H_{-\xi} = H_{+\xi}$. Für $J = 4,5$ Amp. und $H = 12$ ist

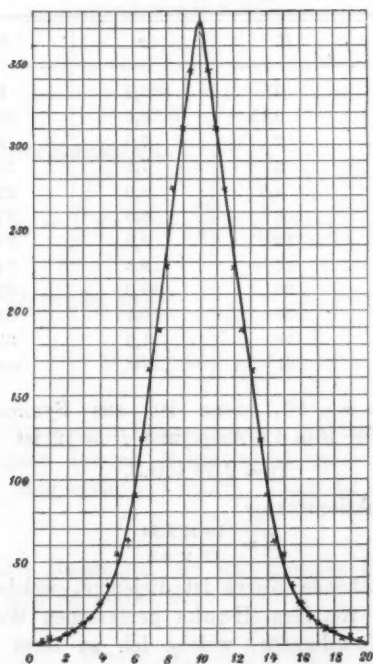
$$\xi = 2,34 \text{ C.G.S.},$$

daher der Reduktionsfaktor

$$R = \frac{10 \times 2,34}{12 \times 4,5}.$$

Die nachstehende Kurve ist diejenige, welche sich wohl am besten den von Hrn. Hupka gemessenen Werten für H anpaßt. Die Koordinaten, welche ich zu ihrer Darstellung benutzt und den späteren Berechnungen zugrunde gelegt habe, sind die folgenden:

x	H	x	H
0	0	6,0	92
0,5	0,25	6,5	123
1,0	1	7,0	158
1,5	3	7,5	195
2,0	5	8,0	233
2,5	8	8,5	271
3,0	12	9,0	309
3,5	17	9,5	344
4,0	24	9,6	353
4,5	34	9,7	361
5,0	48	9,8	367,5
5,5	67	9,9	371,5
6,0	92	10	373



x Abzisse, H Ordinate. Die Sternchen bezeichnen die beobachteten Werte von H .

Zwischen $x = 0$ und $x = 3$ wird die Kurve analytisch auch dargestellt durch die Gleichung

$$(8) \quad 2H = 3x^2 - x,$$

zwischen $x = 9,5$ und $x = 10,5$ durch die Gleichung:

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} H = 373 - \xi^2[2,16006] + \xi^4[2,10327] - \xi^6[1,71675] \\ + \xi^8[0,83291], \end{aligned} \right.$$

wenn $\xi = x - 10$ und die eckigen Klammern die Logarithmen der Koeffizienten enthalten.

Mit Hilfe der letzten Tabelle, der Gleichung (9) und der bekannten Formel der mechanischen Quadratur¹⁾:

$$\int_a^{a+iw} f(t) dt = w \left[\frac{1}{2} f(a+iw) - \frac{1}{12} f'(a+iw) + \frac{11}{720} f'''(a+iw) \dots \right],$$

wenn

$$f\left(a - \frac{1}{2}w\right) = -\frac{1}{2}fa + \frac{1}{12}f'a - \frac{11}{720}f'''a \dots,$$

sind folgende Ausdrücke numerisch ermittelt worden:

$$(10) \quad \lg \frac{(d-b)R}{3000} \int_a^b H dx = 0,58370 - 1,$$

$$(11) \quad \lg \frac{R}{3000} \int_b^d dx \int_b^x H dx = 0,50091,$$

$$(12) \quad \lg \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3000}\right)^2 \int_0^d dx \left[\int_0^x dx R H \right]^2 = 0,96341 - 2,$$

$$(13) \quad \lg \frac{2}{15} \cdot \left(\frac{1}{3000}\right)^2 \int_0^d dx \left[\int_0^x dx R H \right]^2 = 0,510 - 3.$$

Setzt man in (12) und (13) als obere Grenze b statt d , dann ergeben sich Zahlenwerte für die so entstandenen Ausdrücke, die verschwindend klein sind im Vergleich zu den Zahlenwerten, die der oberen Grenze d entsprechen. Es kann daher in (12) und (13) die untere Grenze 0 mit b vertauscht werden.

1) Vgl. z. B. Bauschinger, Astronomische Tafelsammlung.

Bis auf das Glied mit dem Integral

$$(14) \quad \int_0^a \frac{H}{\Phi_\beta} dx$$

als Faktor, sind somit alle zur Berechnung von y_1 erforderlichen Konstanten ermittelt.

Zur Berechnung des Integrals (14) ist zu berücksichtigen, daß die magnetische Feldstärke zwischen Anode und Kathode äußerst schwach war. Es beeinträchtigt daher die zur Berechnung des Integrals (14) erforderliche Genauigkeit nicht, wenn in Φ_β und P nur die niedrigste Potenz von β berücksichtigt wird.

Man erhält dann aus den Hupkaschen Gleichungen (II) und (24):

$$(15) \quad \Phi_\beta = \sqrt{P} \sqrt{\frac{2 \eta_0}{3 \cdot 3,5 \cdot c \cdot 10^3}} \sqrt{0,5 + x}.$$

Setzt man (15) und (8) in (14) ein, dann ergibt sich als Resultat einer sehr leicht durchführbaren Integration:

$$(16) \quad \sqrt{P} \sqrt{\frac{2 \eta_0}{3 \cdot 3,5 \cdot c \cdot 10^3}} \int_0^a \frac{H}{\Phi_\beta} dx = 6,84.$$

Aus (10), (11), (12), (13) und (16) ergibt sich wegen (4) und (7) die gesamte magnetische Ablenkung:

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} y_1 &= \frac{J \sqrt{\eta_0 \cdot 10^{-7}}}{\sqrt{P}} [1,27810] + \frac{\eta_0 \cdot 10^{-7}}{C_\beta} [0,55091], \\ &+ \left(\frac{\eta_0 \cdot 10^{-7}}{C_\beta} \right)^2 [0,96341 - 2] + \left(\frac{\eta_0 \cdot 10^{-7}}{C_\beta} \right)^3 [0,510 - 3]. \end{aligned} \right.$$

Die eckigen Klammern enthalten die Logarithmen der Koeffizienten. C_β ist wie bei Hrn. Hupka zur Abkürzung für Φ_β/J gesetzt.

Mit abnehmendem C_β wächst die magnetische Ablenkung. Die kleinsten Werte für C_β finden sich in der Hupkaschen Tab. VIII.

In der Relativtheorie ist der kleinste Wert für C_β :

$$C_\beta = 1,9577,$$

entsprechend

$$P = 42230 \quad \text{und} \quad J = 0,21244,$$

in der Kugeltheorie:

$$C_{\beta} = 1,9462,$$

entsprechend

$$P = 67850 \quad \text{und} \quad J = 0,27252.$$

Setzt man diese Werte in (17) ein, so ergibt sich für die *größte* magnetische Ablenkung in der *Relativtheorie*:

$$y_1 = 0,026 + 3,212 + 0,063 + 0,002 = 3,308 \text{ cm},$$

in der Kugeltheorie:

$$y_1 = 0,026 + 3,230 + 0,069 + 0,002 = 3,327 \text{ cm}.$$

Die größten Werte für C_{β} finden sich in der Hupkaschen Tab. I. In der Relativtheorie beträgt der größte Wert für C_{β} :

$$C_{\beta} = 3,8583,$$

entsprechend:

$$P = 20960 \quad \text{und} \quad J = 0,07518,$$

in der Kugeltheorie:

$$C_{\beta} = 3,8509,$$

entsprechend:

$$P = 19310 \quad \text{und} \quad J = 0,07211.$$

Setzt man diese Werte in (17) ein, dann ergibt sich für die *kleinste* magnetische Ablenkung in der *Relativtheorie*:

$$y_1 = 0,013 + 1,630 + 0,009 + 0 = 1,652,$$

in der Kugeltheorie:

$$y_1 = 0,013 + 1,633 + 0,009 + 0 = 1,655,$$

d. h.: Alle magnetischen Ablenkungen, die sich aus der *Relativtheorie* ergeben, liegen zwischen

$$16,52 \quad \text{und} \quad 33,08 \text{ mm},$$

aus der Kugeltheorie zwischen:

$$16,55 \quad \text{und} \quad 33,27 \text{ mm},$$

die wirklich erfolgten magnetischen Ablenkungen lagen aber zwischen

$$15 \quad \text{und} \quad 30 \text{ mm}.$$

Daher weichen alle aus der *Relativtheorie* hervorgehenden magnetischen Ablenkungen von den wirklich erfolgten Ablenkungen um ca. $10-10\frac{1}{2}$ Proz. ab, alle aus der Kugeltheorie hervorgehenden um $10\frac{1}{2}-11$ Proz.

Die Abweichungen werden in den beiden Theorie mit ab-

nehmendem η_0 kleiner. Legt man zum Beispiel den Bestelmeyerschen Wert $1,72 \times 10^7$ zugrunde, dann ergibt sich für

$$P = 42230 \quad \text{und} \quad J = 0,21244 \quad (\text{vgl. Tab. VIII}),$$

$$C_\beta \text{ (Rel.)} = 1,9290 \quad \text{und} \quad y_1 = 32,60 \text{ mm},$$

d. h. die Abweichung vom Werte 30 mm beträgt immer noch 9 Proz.

Vergleicht man hiermit, daß die Genauigkeit der mikroskopischen Ablesung etwa 0,015 mm betrug, so kommt man zu dem Schlusse, daß mit den Hupkaschen Messungen weder die Relativtheorie noch die Kugeltheorie vereinbar ist.

Man könnte geneigt sein, den großen Unterschied zwischen Theorie und Beobachtung der Ungenauigkeit zuzuschreiben, die bei der Ausmessung der der Hupkaschen Dissertation beigegebenen Figur unvermeidlich ist. Zur Deutung obiger Resultate zugunsten der Theorien müßte jedoch der Abstand zwischen der Anode und dem Phosphoreszenzschirm mehr als 1 cm kleiner angenommen werden als der Abstand, der sich aus der Figur ergibt. Ungenauigkeiten bei der Ausmessung der Figur können daher zur Erklärung meiner Resultate schwerlich in Betracht gezogen werden.

Die Bestimmung der Potentialdifferenzen soll höchstens um $\frac{1}{4}$ Proz. fehlerhaft gewesen sein. Zur Deutung meiner Resultate müßten aber die Werte für die Potentialdifferenzen um ca. 10 Proz. größer angenommen werden.

Irrtümer bei der Ausmessung des Magnetfeldes können eventuell durch theoretische Bestimmung desselben auf Grund der Arbeiten von Minchin¹⁾ und Nogaoka²⁾ ermittelt werden. Untersuchungen in dieser Hinsicht habe ich bereits in Angriff genommen.

Für die Richtigkeit der numerischen Berechnungen glaube ich bürgen zu dürfen, da dieselben mehrmals durchgeführt und aufs schärfste kontrolliert worden sind. Auch alle aus der Hupkaschen Dissertation übernommenen Werte für β und C_β wurden nachgerechnet und eine für die Zwecke meiner Untersuchung hinreichend gute Übereinstimmung gefunden.

1) G. M. Minchin, Phil. Mag. (5) 35 u. 36. 1893; 37. 1894.

2) H. Nogaoka, Phil. Mag. (6) 6. 1903.

Die obigen Ergebnisse sind um so auffallender, als sich bereits bei den Kaufmannschen Messungen für die Relativtheorie Abweichungen von der Beobachtung um ca. 11 Proz. herausgestellt haben. Während aber bei den Hupkaschen Messungen die Kugeltheorie der Relativtheorie in der Leistungsfähigkeit ein wenig nachsteht, werden die Kaufmannschen Beobachtungen von der Kugeltheorie weit besser gedeutet als von der Relativtheorie. Bei den Kaufmannschen Messungen beträgt in der Kugeltheorie der absolute Unterschied zwischen Theorie und Beobachtung nur ca. 4 Proz.¹⁾ Hier würde es daher in der Tat für die Kugeltheorie eine Stütze bedeuten, wenn der Nachweis erbracht werden kann, daß die Kugeltheorie auch den *relativen* Gang der Kurve ($\bar{y} \bar{z}$)²⁾ besser deutet als die Relativtheorie. Da aber die Abweichung um 4 Proz. immer noch sehr unbefriedigend ist, so muß dieser Nachweis von allen unsicheren Beobachtungsdaten möglichst unabhängig sein, besonders von den gemessenen (von Hrn. Bucherer³⁾ angezweifelten) absoluten Werten der elektrischen und magnetischen Feldstärke.

Eine solche Methode für die Analyse der Kaufmannschen Messungen läßt sich in der Tat angeben. Dieselbe setzt nur voraus, daß die Kurven $\bar{z} \bar{y}$ und ihre Ausmessungen unbedingt zuverlässig waren, und daß die durch etwaige Ionisation der Gasreste eingetretene Veränderung des elektrischen Feldes zwischen den Kondensatorplatten so klein war, daß sie für die Beurteilung der Theorien nicht in Betracht kommt.⁴⁾

Den bisherigen Untersuchungen im Anschluß an die Kaufmannschen Messungen wurde ausnahmslos die von Hrn. Kaufmann selbst aufgestellte „ausgeglichene Kurve“ der Tab. VI, l. c. 1906, p. 524, zugrunde gelegt. Diese Tabelle gibt zu neun magnetischen, nicht genau äquidistanten Ablenkungen \bar{z} die zugehörigen ausgeglichenen elektrischen Ablenkungen \bar{y} . Wenn aber die ausgeglichene Kurve mit Hilfe der Lagrange-

1) W. Heil, Berliner Dissert. 1909.

2) Es bezeichnet \bar{y} die elektrische und \bar{z} die magnetische Ablenkung.

3) A. H. Bucherer, Physik. Zeitschr. 9. p. 755. 1908.

4) W. Kaufmann, Verh. 10. p. 91. 1908; W. Heil, Berliner Dissertation 1909.

schen Interpolationsformel auf äquidistante magnetische Ablenkungen, etwa auf die Werte 0,20, 0,25, 0,30, 0,35, 0,40 und 0,45 cm interpoliert wird (vgl. folgende Tabelle), so zeigt sich nach der Bildung der I. und II. Differenzen von \bar{y} , daß sich besonders die II. Differenzen äußerst sprunghaft ändern.

Tabelle IV.

\bar{z}	\bar{y}	I. Diff.	II. Diff.
0,2	0,04135		
0,25	0,0550	. 136,5	. . 19,5
0,3	0,0706	. 156	. . 41,5
0,35	0,09035	. 197,5	. . . 0,5
0,4	0,11015	. 198	. . 23,0
0,45	0,13225	. 221	

Daß dieser unregelmäßige Verlauf der „ausgeglichenen Kurve“ keineswegs eine natürliche Eigentümlichkeit derselben ist, zeigt sich dadurch, daß ein anderes, in gewisser Beziehung einwandfreieres Ausgleichungsverfahren als das Kaufmannsche zu einer Kurve führt, die sich in den II. Differenzen durch große Regelmäßigkeit auszeichnet.

Das weiter unten ausgeführte Ausgleichungsverfahren besteht im wesentlichen darin, daß jede einzelne von Hrn. Kaufmann, l. c. 1906, p. 519/520, mitgeteilte Messungsreihe auf gleiches elektrisches Feld reduziert und auf die sechs äquidistanten magnetischen Ablenkungen $\bar{z} = 0,20, 0,25$ bis $0,45$ interpoliert wurde. Die so erhaltenen sechs Gruppen der elektrischen Ablenkungen y_r wurden aus Rücksicht auf das verschiedene Gewicht p der einzelnen Messungsreihen alsdann nach der Gleichung

$$\bar{y} = \frac{\sum (y_r \cdot p)}{\sum p}$$

ausgeglichen.

Dieses Verfahren scheint mir insofern einwandfreier zu sein als das Kaufmannsche, als Hr. Kaufmann ungeachtet der Krümmung der auszugleichenden Kurven nach dem Schwerpunktssatz Messungen miteinander verknüpft hat, die in \bar{z} bis zu einem halben Millimeter voneinander abweichen. Außerdem erhöht es wesentlich die Übersicht, Sicherheit und Kontrollbarkeit der numerischen Berechnung aller nur von \bar{z} abhängigen

Formeln, wenn denselben äquidistante Werte in \bar{z} zugrunde gelegt werden.

Daß ich mich auf die zu den sechs magnetischen Ablenkungen 0,2 bis 0,4 gehörigen elektrischen Ablenkungen beschränkt habe, ist dadurch begründet, daß die Ausführungen weiter unten je zwei benachbarte Beobachtungen miteinander verknüpfen, und es daher erforderlich ist, daß allen Beobachtungen womöglich dasselbe größte Gewicht beigelegt werden kann. Der ersten Beobachtung in der Kaufmannschen Tab. VI kommt aber nach Kaufmann nur die Hälfte, der achten und neunten nur ein Viertel des Gewichtes zu, das den übrigen sechs Beobachtungen beigelegt werden darf, und diese Gewichtsverhältnisse würden auch bei dem neuen Ausgleichungsverfahren ungeändert bestehen bleiben. Zunächst wurden alle beobachteten Werte der elektrischen Ablenkungen auf die Spannungsdifferenz 2603 Volt reduziert nach der Gleichung:

$$y_r = y_b \frac{2603}{\text{mittlere Spannung am Kondensator}}$$

(vgl. W. K., Ann. d. Phys. l. c. p. 521).

Da in den beobachteten magnetischen Ablenkungen nominelle 10 mm einen wahren Wert von 9,975 mm hatten (vgl. W. K., Ann. d. Phys. l. c. p. 518),

	\bar{z}		z_b
so entsprechen den wahren Werten:	0,20	die nominellen Werte:	0,2005
	0,25		0,2506
	0,30		0,30075
	0,35		0,3509
	0,40		0,4010
	0,45		0,4511

Die Interpolation hat daher in bezug auf die unter z_b stehenden nominellen Werte zu erfolgen. Dies ist auch durchweg geschehen mit Ausnahme der Interpolation auf den letzten Wert 0,4511. Da nämlich die zweiten Messungsreihen der Kurven auf den Platten 11 und 13 nur bis zu den Werten $z_b = 0,4403$ bzw. $z_b = 0,4456$ ausgeführt worden sind, so ist, um Extrapolationen zu vermeiden, ein nomineller Wert z ermittelt worden, der der Schwerpunktsgleichung:

$$\frac{z_1 p_1 + z_2 p_2 + z(p_3 + p_4 + \dots p_7)}{p_1 + p_2 + p_3 + \dots p_7} = 0,4511$$

Genüge leistet. In dieser Gleichung ist

$$z_1 = 0,4403, \quad z_2 = 0,4456,$$

$p_1 = 1$ das Gewicht der zweiten Messungsreihe auf Platte 11,
 $p_2 = 1,3$ das Gewicht der zweiten Messungsreihe auf Platte 13,
 p_3 bis p_7 die Gewichte der übrigen Messungsreihen (vgl. W. K.,
 Ann. d. Phys., l. c. p. 521—523). Es ergab sich:

$$z = 0,4550.$$

Die zwei zu den magnetischen Ablenkungen z_1 und z_2 gehörigen gemessenen elektrischen Ablenkungen wurden also direkt benutzt, während sonst in bezug auf die magnetische Ablenkung $z = 0,4550$ interpoliert wurde.

Das ganze Interpolationsverfahren ist um so weniger bedenklich, als fast alle den Messungen zugrunde gelegten magnetischen Ablenkungen nur wenig von den nominellen Werten 0,2005 bis 0,4550 abweichen. Es konnte also in den meisten Fällen die Stirlingsche Interpolationsformel angewendet werden, weniger häufig brauchte die Besselsche Formel und nur selten die Newtonsche Interpolationsformel angewendet zu werden.

Tabelle V.

Auf gleiches elektrisches Feld reduzierte elektrische Ablenkungen.

Platte	z_1	y_r	p
10	0,2005	0,0415	1
11		0,0421	1
11		0,0410	1
12		0,0434	1
13		0,0397	1,3
13		0,0405	1,3
10	0,2506	0,0555	1
11		0,0547	1
11		0,0540	1
12		0,0576	1
13		0,0536	1,3
13		0,0539	1,3
15		0,0572	0,65
15		0,0565	0,65

Tabelle V (Fortsetzung).

Platte	x_b	y_r	p
10	0,30075	0,0713	1
11		0,0697	1
11		0,0689	1
12		0,0742	1
13		0,0700	1,3
13		0,0694	1,3
15		0,0740	0,65
15		0,0737	0,65
11	0,3509	0,0870	1
11		0,0872	1
12		0,0921	1
13		0,0882	1,3
13		0,0887	1,3
15		0,0921	0,65
15		0,0914	0,65
11	0,4010	0,1087	1
11		0,1087	1
12		0,1106	1
13		0,1097	1,3
13		0,1097	1,3
15		0,1107	0,65
15		0,1102	0,65
11	0,4550	0,1323	1
11	0,4403	0,1302	1
12	0,4550	0,1353	1
13	0,4550	0,1331	1,3
13	0,4456	0,1294	1,3
15	0,4550	0,1337	0,65
15	0,4550	0,1326	0,65

Die ausgeglichenen elektrischen Ablenkungen erhält man aus jeder Gruppe nach der Gleichung

$$\bar{y} = \frac{\Sigma(y_r \cdot p)}{\Sigma p}.$$

Die Gewichte derselben sind dann proportional Σp . Folgende Tabelle enthält die so erhaltenen sechs Punkte der ausgeglichenen Kurve. Die Gewichte sind auf ganze Zahlen abgerundet.

Tabelle VI.

\bar{x}	\bar{y}	I. Diff.	II. Diff.	Σp
0,20	0,0413			7
0,25	0,0551	. 138	.. 21,5	8
0,30	0,07105	. 159,5	.. 22	8
0,35	0,0892	. 181,5	.. 23,5	7
0,40	0,1097	. 205	.. 20	7
0,45	0,1322	. 225		7

Die Abweichungen der elektrischen Ablenkungen in den Tab. IV und VI betragen im Maximum ca. 12 Mikron, sind also immerhin so erheblich, daß es nicht gleichgültig sein kann, welche von den beiden ausgeglichenen Kurven der Prüfung der in Frage stehenden Theorien zugrunde gelegt wird. Allen folgenden Berechnungen dient daher die „ausgegliche Kurve“ der Tab. VI als Grundlage.

Wegen der großen Verschiedenheit der Zahlenwerte, die bis jetzt über das Verhältnis ϵ/μ_0 vorliegen, brauchen wir uns nicht an einen bestimmten Wert für ϵ/μ_0 zu halten. Auch ist die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, daß sowohl der von Hrn. Kaufmann angegebene Zahlenwert für das elektrische Feldintegral E_1 , sowie für die Spannung der Kondensatorplatten den tatsächlichen Verhältnissen nicht entspricht.

Was die Spannungsmessungen des Hrn. Kaufmann betrifft, so wies Hr. Bucherer¹⁾ darauf hin, daß dieselben wahrscheinlich fehlerhaft seien, da Hr. Kaufmann den Widerstand des Kondensators nicht gemessen, sondern unendlich groß angenommen habe.

Was aber das „elektrische Feldintegral“ betrifft, so besteht dasselbe

1. aus Gliedern, die nur die Dimensionen des Apparates enthalten und daher ein für allemal als sicher festgestellt betrachtet werden können, und

2. aus Gliedern, welche abhängig sind vom Verlauf des elektrischen Feldes zwischen den Plattenrändern und der Ebene der Strahlungsquelle bzw. der Diaphragmaebene.

¹⁾ A. H. Bucherer, Physik. Zeitschr. 7. p. 755. 1908.

Und gerade in diesen Gebieten hatten die von den Radiumstrahlen erzeugten Ionen und Elektronen unter der Triebkraft der elektrischen Feldstärke zu ihrer Vermehrung durch Ionenstoß weit mehr Spielraum als zwischen den Kondensatorplatten. An den Rändern konnten nämlich die Ionen und Elektronen, vom geraden Wege nach der Seite abweichend, auf einem Umwege von einer Platte zur anderen gelangen.

Es kann sich aber auch eine elektrische Strömung zwischen den Plattenrändern einerseits und der Ebene der Strahlenquelle bzw. der Diaphragmaebene andererseits gebildet haben, also auf einem Wege, der größer war als der doppelte Plattenabstand und daher die Bildung von Ionen und Elektronen begünstigt hat.¹⁾

Es ist daher nicht unwahrscheinlich, daß gerade in den beiden Gebieten zwischen den Plattenrändern und den Ebenen der Strahlenquelle und des Diaphragmas das elektrische Feld in einer für die Beurteilung der Theorien in Betracht kommenden Weise verzerrt worden ist.

Es braucht übrigens die Verzerrung des elektrischen Feldes in beiden Gebieten nicht gleich stark gewesen zu sein. Das ist schon deshalb unmöglich, weil die Platten in bezug auf die Ebene der Strahlungsquelle einerseits und die Diaphragmaebene andererseits nicht ganz symmetrisch aufgestellt waren, dann aber auch besonders deshalb, weil in unmittelbarer Nähe der Strahlungsquelle die Ionendichtigkeit offenbar größer war als an der ca. 2 cm entfernten Diaphragmaöffnung.

Da im folgenden von der Planckschen Methode²⁾ der Analyse der Kaufmannschen Messungen Gebrauch gemacht wird, so könnten Zweifel erhoben werden, ob dies statthaft ist, da dieselbe doch so durchgeführt ist, wie wenn vollständige Symmetrie in bezug auf die Mitte der Strecke von der Strahlungsquelle bis zur Diaphragmaöffnung geherrscht hätte.

Dagegen wäre einzuwenden, daß die Plancksche Methode durchaus nicht verlangt, daß in Wirklichkeit strenge Symmetrie

1) Die mittlere freie Weglänge der Ionen und Elektronen liegt nämlich bei einem Drucke von 0,1 mm Hg, der allerdings der höchste ist, welcher bei den Kaufmannschen Messungen in Betracht kommt, zwischen 1,1 und 4,3 mm.

2) M. Planck, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 8, p. 418. 1906.

vorliegt, sondern nur eine *Reduktion* unsymmetrischer, komplizierter auf symmetrische, einfachere Verhältnisse darstellt, ähnlich wie die Runge-Kaufmannsche Methode eine Reduktion der in Wirklichkeit endlichen Ablenkungen auf unendlich kleine Ablenkungen ist.

In folgender Zusammenstellung aller nach der Planckschen Methode¹⁾ zur Berechnung der elektrischen Ablenkung \bar{y} erforderlichen Formeln bezeichnet

$x_1 = 1,994$ cm den Abstand der Strahlungsquelle von der Diaphragmaöffnung,

$x_2 = 3,963$ cm den Abstand der Strahlungsquelle von der photographischen Platte,

ρ den Radius der kreisförmigen Projektion der Strahlenbahn auf die xz -Ebene,

φ den Winkel, welchen irgend eine in der Richtung der Strahlen genommene Tangente des Kreises mit der x -Achse bildet, φ_1 und φ_2 die Werte von φ für $x = x_1$ bzw. $x = x_2$,

φ' den Wert von φ für $x = x_1/2 + \xi'$, wenn ξ' der Gleichung genügt

$$(18) \quad \frac{1}{2}(x_2 - x_1) \left(\frac{x_1}{2} + \xi' \right) = E_1,$$

q die Geschwindigkeit der Elektronen,

β das Verhältnis der Geschwindigkeit der Elektronen zu der des Lichtes,

$\mathfrak{H} = 142,8$ die im Felde als nahezu konstant angenommene magnetische Feldstärke,

p die elektrische Feldstärke im homogenen Teil des elektrischen Feldes, d. h. den Quotienten aus der Potentialdifferenz und dem Plattenabstand,

κ , λ und μ bezeichnen Hilfsgrößen, definiert durch die Gleichungen (19), (20) und (25).

Die Berechnung der elektrischen Ablenkung \bar{y} vollzieht sich alsdann nach folgendem Schema:

$$(19) \quad \kappa - \lambda \cdot \xi' = 1,$$

$$(20) \quad \kappa - \lambda \cdot \frac{x_1}{2} = 0,$$

$$(21) \quad \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{x_1 \bar{\kappa}}{(x_2 - x_1) x_2 + \bar{\kappa}^2},$$

1) M. Planck, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 8. p. 418. 1906.

$$(22) \quad \varrho = \frac{x_1}{2 \sin \varphi_1},$$

$$(23) \quad \sin \varphi' = \frac{\xi'}{\varrho},$$

$$(24) \quad \sin \varphi_2 = \frac{2x_2 - x_1}{x_1} \cdot \sin \varphi_1,$$

$$(25) \quad u = \frac{\mu_0}{\varepsilon} \cdot \frac{2c \sin \varphi_1}{x_1 \Phi}.$$

Nachdem auf diese Weise u ermittelt worden ist, ergibt sich β bzw. $q = c \cdot \beta$ in der Relativtheorie aus der Gleichung:

$$(26) \quad \frac{1}{u} = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

in der Kugeltheorie aus der Gleichung:

$$(27) \quad \frac{1}{u} = \frac{3}{4\beta} \left(\frac{1 + \beta^2}{2\beta} \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta} - 1 \right).$$

Wenn β bzw. q bekannt ist, berechnet sich die elektrische Ablenkung nach der Formel:

$$(28) \quad \bar{y} = \frac{p \cdot 10^8 \cdot q (\varphi_2 - \varphi_1)}{q \Phi} [\varphi' + \kappa (\varphi_1 - \varphi') - \lambda \rho (\cos \varphi' - \cos \varphi_1)].$$

Es soll nun auf Grund der gegebenen ausgeglichenen Kurve der Tab. VI untersucht werden, ob überhaupt für irgend eine der zu prüfenden Theorien ein physikalisch möglicher Wert für ε/μ_0 existiert, der längs der ganzen ausgeglichenen Kurve konstant ist, und ob uns die betreffende Theorie die Gewähr zu geben vermag, daß auch p und E_1 längs der ganzen Kurve konstant gewesen sind. Die zweite Forderung wäre z. B. dann erfüllt, wenn sich eine nur von p und E_1 abhängige Funktion f angeben und ohne Kenntnis der Größen p und E_1 aus der Kurve selbst berechnen läßt, die längs der ganzen Kurve wo möglich denselben Zahlenwert besitzt.

Zur Ermittlung je eines Wertepaares ε/μ_0 und f werden zwei beobachtete Kurvenpunkte erforderlich sein. Da aber die ausgeglichene Kurve der Tab. VI sechs beobachtete Punkte enthält, so möge die dadurch erlaubte Willkür in der Wahl der Punktepaare durch die Feststellung beseitigt werden, daß wir je einmal je zwei benachbarte beobachtete Punkte miteinander kombinieren. Es ergeben sich auf diese Weise fünf

voneinander unabhängige Wertepaare für ε/μ_0 und f . Je vollkommener in einer Theorie diese fünf Wertepaare die Bedingung der Konstanz erfüllen, desto leistungsfähiger geht die betreffende Theorie aus den Kaufmannschen Messungen hervor.

Ausgehend von Gleichung (28) p. 539 führen wir für die von \bar{z} und ξ' abhängigen Ausdrücke zur Abkürzung ein:

$$n = x(\varphi_1 - \varphi') - \lambda \varrho (\cos \varphi' - \cos \varphi_1),$$

$$N = \frac{(\varphi_2 - \varphi_1)(\varphi' + n) \cdot \varrho}{\bar{\varphi}}.$$

Dann ist, wenn p in Volt pro cm ausgedrückt wird

$$(29) \quad \bar{y} = \frac{p \cdot N}{800 \cdot \beta}.$$

Für den Ausdruck N läßt sich eine für das Intervall $\bar{z} = 0,20$ bis $0,45$ und $\xi' = 0,40$ bis $0,60$ cm gültige Eigenschaft nachweisen, die die Durchführung der gesetzten Aufgabe wesentlich erleichtert.

Zunächst setzen wir in den Ausdruck für N

$$\cos \varphi' - \cos \varphi_1 = 2 \sin \frac{\varphi_1 + \varphi'}{2} \cdot \sin \frac{\varphi_1 - \varphi'}{2}.$$

Der in \bar{y} verursachte Fehler beträgt höchstens $-1/10$ Mikron, wenn man den $\sin(\varphi_1 - \varphi')/2$ durch den Bogen $(\varphi_1 - \varphi')/2$ ersetzt, allerdings unter der Voraussetzung, daß man nicht unter $\xi' = 0,40$ und über $\bar{z} = 0,45$ cm hinausgeht und für p rund 20000 Volt einsetzt. Somit wird:

$$n = (\varphi_1 - \varphi') \left(x - \lambda \varrho \sin \frac{\varphi_1 + \varphi'}{2} \right).$$

Aus den Gleichungen (19) und (20) p. 538 geht hervor, daß

$$x = \frac{x_1}{x_1 - 2\xi'} \quad \text{und} \quad \lambda = \frac{2}{x_1 - 2\xi'} \quad \text{ist.}$$

Zerlegt man ferner $\sin(\varphi_1/2 + \varphi'/2)$ in die Funktionen der einzelnen Summanden des Argumentes, so läßt sich jetzt schreiben

$$n = \frac{\varphi_1 - \varphi'}{x_1 - 2\xi'} \left(x_1 - 2\varrho \sin \frac{\varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi'}{2} - 2\varrho \sin \frac{\varphi'}{2} \cos \frac{\varphi_1}{2} \right).$$

Im zweiten Klammergliede dieser Gleichung kann $\cos \varphi'/2$ durch $\cos \varphi_1/2$ und im dritten $\cos \varphi_1/2$ durch $\cos \varphi'/2$ er-

setzt werden. Dadurch wird zwar der absolute Betrag des zweiten Klammerngliedes zu klein, der des dritten zu groß; der Klammerinhalt wird daher fehlerhaft um die Differenz der Abweichungen der zwei verfälschten letzten Glieder von den wahren Werten. Dieselbe beträgt höchstens 5×10^{-4} und der dadurch in \bar{y} verursachte Fehler nur etwa höchstens $-0,5$ Mikron.

Somit ist, wenn

$$2 \sin \frac{\varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_1}{2} = \sin \varphi_1$$

und

$$2 \sin \frac{\varphi'}{2} \cos \frac{\varphi'}{2} = \sin \varphi'$$

gesetzt wird,

$$n = \frac{\varphi_1 - \varphi'}{x_1 - 2\xi'} (x_1 - \varrho \sin \varphi_1 - \varrho \sin \varphi').$$

Da ferner $\varrho \sin \varphi_1 = x_1/2$ und $\varrho \sin \varphi' = \xi'$ ist, so ergibt sich

$$n = \frac{\varphi_1 - \varphi'}{x_1 - 2\xi'} \left(\frac{x_1}{2} - \xi' \right).$$

Daher

$$n = \frac{\varphi_1 - \varphi'}{2},$$

$$(30) \quad N = \frac{\varrho}{\Phi} \frac{(\varphi_1 - \varphi_1)(\varphi_1 + \varphi')}{2}.$$

Es möge die Abhängigkeit der Größe N von \bar{z} und ξ' durch die Schreibweise $N(\gamma \nu)$ angedeutet werden. γ und ν mögen bestimmte Zahlenwerte der Argumente \bar{z} und ξ' bezeichnen: γ eine bestimmte Zahl aus der Gruppe

$$0,2, 0,25, 0,3, 0,35, 0,4, 0,45,$$

ν erfülle die Bedingung

$$0,4 < \nu \leq 0,6 \text{ cm.}$$

Da ϱ , φ_1 und φ' nur von \bar{z} abhängig ist, φ' dagegen von \bar{z} und ξ' , so ist

$$(31) \quad \frac{N(\gamma \nu)}{N(\gamma 0,6)} = \frac{\varrho \varphi_1 + \varrho \varphi'_\nu}{\varrho \varphi_1 + \varrho \varphi'_{0,6}},$$

wenn der Index bei φ' den der Berechnung von φ' zugrunde gelegten Zahlenwert von ξ' bezeichnet. Zur Abkürzung sei

$$(32) \quad \frac{N(\gamma \nu)}{N(\gamma 0,6)} = g(\gamma \nu).$$

Dann ist für $\nu = 0,6$.. $g(\gamma \nu) = 1$.

In bezug auf die übrigen Werte für ν läßt sich folgendes ausführen:

Setzt man in Gleichung (31)

$$\varphi_1 = \sin \varphi_1 + \frac{\varphi_1^3}{3!} - \frac{\varphi_1^5}{5!} + \dots,$$

$$\varphi' = \sin \varphi' + \frac{\varphi'^3}{3!} - \frac{\varphi'^5}{5!} + \dots,$$

so folgt wegen (32)

$$g(\gamma \nu) = \frac{\varrho \sin \varphi_1 + \varrho \sin \varphi_{\nu'} + \varrho \left[\frac{\varphi_1^3 + \varphi_{\nu'}^3}{3!} - + \dots \right]}{\varrho \sin \varphi_1 + \varrho \sin \varphi_{0,6} + \varrho \left[\frac{\varphi_1^3 + \varphi_{0,6}^3}{3!} - + \dots \right]},$$

und wegen (22) und (23)

$$g(\gamma \nu) = \frac{\frac{x_1}{2} + \nu + \varrho \left[\frac{\varphi_1^3 + \varphi_{\nu'}^3}{3!} - + \dots \right]}{\frac{x_1}{2} + 0,6 + \varrho \left[\frac{\varphi_1^3 + \varphi_{0,6}^3}{3!} - + \dots \right]}.$$

Dieser Quotient ist in den Hauptgliedern des Zählers und Nenners nicht mehr abhängig von \bar{z} . Beschränkt man sich in \bar{z} auf das Intervall 0,20 bis 0,45 cm, so unterscheiden sich die für $\bar{z} = 0,20$ berechneten Quotienten von den für $\bar{z} = 0,45$ berechneten selbst im ungünstigsten Falle (nämlich $\nu = 0,40$) nur um ca. 1×10^{-4} . Die Mittelwerte aus den extremsten Werten geben daher längs der ganzen Kurve ($\bar{z} \bar{y}$) hinreichend genaue Werte für $g(\gamma \nu)$. Diese Mittelwerte mögen mit $g(\nu)$ bezeichnet werden. Es folgt daher die Gleichung

$$(33) \quad g(\nu) \cdot N(\gamma, 0,6) = N(\gamma \nu).$$

Somit ist $N(\gamma \nu)$ in das Produkt zweier Faktoren zerlegt, von denen der erste nur mit ξ' , der zweite nur mit \bar{z} variiert. Beide Faktoren können tabuliert werden.

Tabelle VII.

\bar{z}	$N(\bar{z}, 0,6) \times 10^3$
0,20	0,5641
0,25	0,7049
0,30	0,8456
0,35	0,9861
0,40	1,1264
0,45	1,2665

Tabelle VIII.

ξ'	g
0,4	0,8748
0,5	0,9374
0,6	1,0000

Setzt man in Gleichung (29) wegen Gleichung (33) kurz

$$N = g N(\bar{z}, 0,6),$$

dann folgt:

$$(34) \quad \bar{y} = \frac{p \cdot g \cdot N(\bar{z}, 0,6)}{300 \cdot \beta}.$$

Daher

$$(35) \quad p g = \frac{300 \beta \cdot \bar{y}}{N(\bar{z}, 0,6)}.$$

Es sei

$$(36) \quad \eta = \frac{\beta}{p g}.$$

Dann ist wegen Gleichung (34)

$$(37) \quad \eta = \frac{N(\bar{z}, 0,6)}{300 \bar{y}}.$$

η kann also unabhängig von jeder Theorie für die sechs Punkte der Kurve $(\bar{y} \bar{z})$ berechnet werden.

Tabelle IX.

\bar{z}	$\eta \times 10^4$
0,20	0,4553
0,25	0,4264
0,30	0,3967
0,35	0,3685
0,40	0,3423
0,45	0,3193

Wenn k eine der Zahlen 0,2, 0,25 . . . bis 0,40 bezeichnet, so folgt aus der Gleichung

$$(38) \quad \frac{s}{\mu_0} = \frac{2 c \sin \varphi_1}{x_1 \Phi} \cdot \frac{1}{u} \quad (\text{vgl. Gl. (25)})$$

$$\left(\frac{\sin \varphi_1}{u} \right)_k = \left(\frac{\sin \varphi_1}{u} \right)_{k+0,5}.$$

Oder, da u eine Funktion von β ist und nach Gleichung (36)

$$(39) \quad \beta = \eta \cdot p g$$

ist, so gilt

$$(40) \quad \frac{(\sin \varphi_1)_k}{(\sin \varphi_1)_{k+0,5}} = \frac{u_{\eta_k} \cdot p g}{u_{\eta_{k+0,5}} \cdot p g}.$$

In dieser Gleichung ist das Produkt $p g$ die einzige Unbekannte. Sie sei mit f bezeichnet. Nach der Lorentzschen Theorie läßt sich Gleichung (40) direkt nach f auflösen. Es ist nämlich nach der Lorentzschen Theorie wegen Gl. (26):

$$(41) \quad \frac{(\sin \varphi_1)_k}{(\sin \varphi_1)_{k+0,5}} = \frac{\eta_{k+0,5}}{\eta_k} \sqrt{\frac{1 - \eta_k^2 \cdot f^2}{1 - \eta_{k+0,5}^2 \cdot f^2}}.$$

Führt man zur Abkürzung für die Lorentzsche Theorie ein:

$$M = \left[\frac{(\eta \cdot \sin \varphi_1)_{k+0,5}}{(\eta \cdot \sin \varphi_1)_k} \right]^2,$$

so folgt aus (41):

$$1 - \eta_{k+0,5}^2 \cdot f^2 = M(1 - \eta_k^2 \cdot f^2).$$

Hieraus folgt:

$$f^2 = \frac{M - 1}{M \cdot \eta_k^2 - \eta_{k+0,5}^2}.$$

Während aus dieser Gleichung f für die Lorentzsche Theorie direkt bestimmt werden kann, muß für die Abrahamsche Theorie f aus Gleichung (40) etwa mit Hilfe der Kaufmannschen Tafel (Ann. d. Phys. l. c. p. 552) ermittelt werden. Ist die Funktion f für je zwei benachbarte elektrische Ablenkungen bekannt, so kann nach Gleichung (39) β , nach den Gleichungen (26) und (27) u , und nach Gleichung (38) ε/μ_0 bestimmt werden. Folgende Tabelle enthält die so berechneten Werte für die Funktion f und ε/μ_0 .

Tabelle X.

$\bar{\alpha}$	Abraham		Lorentz	
	f	$\varepsilon/\mu_0 \cdot 10^{-7}$	f	$\varepsilon/\mu_0 \cdot 10^{-7}$
0,20 / 0,25	20040	1,845	18970	1,83
0,25 / 0,30	20025	1,84	18720	1,76
0,30 / 0,35	20025	1,84	18570	1,73
0,35 / 0,40	19850	1,81	18255	1,68
0,40 / 0,45	20180	1,86	18550	1,725
0,35 / 0,45	20020	1,84		

Mittelwerte für f und ϵ/μ_0 :Abraham $f = 20025$, $\epsilon/\mu_0 = 1,84 \times 10^7$,Lorentz $f = 18610$, $\epsilon/\mu_0 = 1,74 \times 10^7$,Kaufmann $f = 20870$.

Aus der Tab. X geht die Abrahamsche Theorie als diejenige hervor, welche am vollkommensten die Forderung erfüllt, daß ϵ/μ_0 längs der ganzen Kurve konstant sein soll. Die beiden Werte $1,81 \times 10^7$ und $1,86 \times 10^7$ weichen ein wenig vom Mittelwert $1,84 \times 10^7$ ab. Das liegt aber am 5. Kurvenpunkt ($\bar{y} \bar{z}$) der Tab. VI. Denn wenn man denselben überschlägt und den 4. gleich mit dem 6. Kurvenpunkt kombiniert, so ergibt sich für ϵ/μ_0 wiederum der Wert $1,84 \times 10^7$ und für f der Wert 20020.

Insofern zur Berechnung der Tab. X der Wert des Gradienten p nicht bekannt zu sein brauchte, sind die Zahlenwerte für ϵ/μ_0 von der Spannungsdifferenz der Kondensatorplatten unabhängig, und es ist somit dem Buchererschen Einwand Rechnung getragen worden.¹⁾

Die obigen Mittelwerte für ϵ/μ_0 sind offenbar für die Theorien, was deren Stellung zu den Kaufmannschen Messungen betrifft, die günstigsten Werte für ϵ/μ_0 überhaupt.

Daß bei der von Hrn. M. Planck²⁾ ausgeführten Berechnung der p -Werte auf Grund der Bestelmeyerschen Zahl für ϵ/μ_0 die Lorentzsche Theorie viel geringere Abweichungen der Gradienten untereinander aufweist als die Abrahamsche Theorie, rührt offenbar hauptsächlich daher, daß der der Lorentzschen Theorie günstigste Wert für ϵ/μ_0 , nämlich die Zahl $1,74 \times 10^7$, der Bestelmeyerschen Zahl $1,72 \times 10^7$ weit näher liegt als die für die Abrahamsche Theorie günstigste Zahl $1,84 \times 10^7$.

Die aus der Abrahamschen Theorie sich ergebende Zahl $1,84 \times 10^7$ ist nur wenig kleiner als die Simonsche Zahl $1,878 \times 10^7$ und stimmt gut überein mit der Beckerschen Zahl $1,847 \times 10^7$ für langsame Kathodenstrahlen.

1) Was das Verhalten der Werte für ϵ/μ_0 in bezug auf die Forderung der Konstanz betrifft, so ist dasselbe auch unabhängig vom absoluten Betrag für die magnetische Feldstärke.

2) M. Planck, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 9. p. 304. 1907.

Hr. A. Becker, der für seine Messungen den Anspruch auf den Grad bis dahin unerreichter Genauigkeit erhebt, kommt zu dem Schlusse, „daß die erste Dezimale der gesuchten Größe 1,8 . . . definitiv als sichergestellt zu betrachten ist. Diese Folgerung würde in dem Falle, daß die Kugeltheorie aus dem Wettstreit der Theorien als richtig hervorgehen sollte, in der guten Übereinstimmung der Simonschen und besonders der Beckerschen Zahl mit dem Werte $1,84 \times 10^7$ eine wesentliche Stütze gewinnen.

Das Ergebnis der obigen Analyse der Kaufmannschen Messungen trägt nicht den Charakter einer definitiven Entscheidung. Denn es stützt sich in erster Linie auf die Voraussetzung, daß die Kurven und ihre Ausmessungen unbedingt zuverlässig waren. Wenn man aber die bedeutenden Schwierigkeiten der Messungen bedenkt und vor allem die durch die verhältnismäßig große Breite der Kurven bedingte Willkür derselben, so ist es immerhin fraglich, ob diese Voraussetzung zutrifft.

Während aber die Hupkaschen und vor allem die Kaufmannschen Messungen wegen des reichen mitgeteilten Zahlenmaterials einer eingehenden Kontrolle zugänglich sind, ist dies bei den Buchererschen Messungen leider nicht der Fall.

Messungen und Berechnungen, welche eine so wichtige Entscheidung wie die zwischen den Theorien der Dynamik des Elektrons zum Gegenstand der Untersuchung machen, sollten in allen Teilen der Kritik zugänglich sein.

Hermesdorf bei Berlin, 2. November 1909.

(Eingegangen 10. November 1909.)

4. Zur Thermodynamik der Beugung; von M. Laue.¹⁾

Einleitung.

Den derzeitigen Stand der Frage nach der Thermodynamik der Beugung habe ich jüngst in der Einleitung meines Aufsatzes „Zur Thermodynamik der Gitterbeugung“ erörtert.²⁾ Es wurde darauf hingewiesen, daß alles für die Irreversibilität dieses Vorganges spricht, daß die bisher versuchten Beweise aber auf dem Additionstheorem der Entropie beruhen und nicht mehr zu überzeugen vermögen, seit bekannt ist, daß sich das letztere nur auf inkohärente Vorgänge anwenden läßt. Denn die durch Beugung entstehenden Wellengruppen sind im allgemeinen in allen ihren Teilen kohärent. Hier soll ein Beweis dafür erbracht werden, der von diesem Einwand nicht getroffen wird.

Es versteht sich von selbst, daß wir uns dabei auf Beugungsvorgänge ohne Absorption beschränken; denn wie in der genannten Arbeit ausgeführt wird, bedingt jede Absorption an sich die Unumkehrbarkeit des Vorganges. Wollen wir daher den thermodynamischen Einfluß der Beugung rein studieren, so müssen wir die Absorption ausschalten. Da sich in vielen Fällen die Beugung an absorbierenden und absorptionsfreien Körpern qualitativ nicht unterscheidet, geht aus dem Folgenden unmittelbar hervor, daß ein Beugungsvorgang mit Absorption die Entropie stärker vergrößert, als wenn derselbe Bruchteil der Strahlungsenergie geometrisch-optisch vernichtet würde.

In vollster Allgemeinheit können wir das Problem freilich nicht anfassen; vielmehr soll die Unumkehrbarkeit nur für zwei Beispiele bewiesen werden, nämlich für die Beugung an kleinen durchsichtigen Körpern und an großen Öffnungen

1) Vgl. M. Laue, Verh. d. Deutsch. Physik. Ges. 11. p. 467. 1909; Physik. Zeitschr. 10. p. 807. 1909.

2) M. Laue, Ann. d. Phys. 30. p. 225. 1909.

in nichtabsorbierenden Schirmen. Die Ausdrücke „klein“ und „groß“ bestimmen hier stets das Verhältnis der linearen Dimensionen zur Wellenlänge der als monochromatisch vorausgesetzten Strahlung. Da aber von der Beugung an kleinen Körpern zu der an großen ein durchaus stetiger Übergang führt, so ist nicht einzusehen, wo da eine Grenze zwischen umkehrbaren Vorgängen und solchen, die es nicht sind, liegen sollte. Infolgedessen schließt der für einen einzigen Fall von Beugung geführte Beweis der Irreversibilität den allgemeinen Beweis ein. Auszunehmen hiervon ist nur die Beugung an vielen, gleichen, gesetzmäßig angeordneten Elementen (Gitterbeugung), wie in der oben zitierten Arbeit bewiesen ist. Diese läßt sich nämlich mit jeder beliebigen Annäherung umkehrbar gestalten, weil nicht die Beugung an einem einzelnen Teilchen, sondern die Interferenz vieler gleichartiger, kohärenter Beugungseffekte mit gesetzmäßig verteilten Phasendifferenzen es ist, was diese Erscheinung in erster Linie bestimmt.

Der Plan der Untersuchung ist der folgende: § 1 bringt ein paar thermodynamische Hilfssätze über die Verwandelbarkeit von Strahlenbündeln. § 2 enthält den Beweis für die Unumkehrbarkeit der Beugung an kleinen durchsichtigen Teilchen von beliebiger Gestalt, während § 3 das Entsprechende für die Beugung an großen Öffnungen leistet.

§ 1. Thermodynamische Hilfssätze.

Ein polarisiertes, monochromatisches Strahlenbündel von der Schwingungszahl ν ist bestimmt durch eine Fläche f , die es erleuchtet, seine Neigung ϑ gegen die Normale dieser Fläche, seinen Öffnungswinkel ω , seine Länge l und seine spektrale Breite $d\nu$, ferner durch den Brechungsindex n und die Lichtgeschwindigkeit q desjenigen Mittels, in dem es sich befindet, und schließlich durch die „reduzierte“ spezifische Intensität κ^1 , d. h. diejenige spezifische Intensität, die es an-

1) M. Laue, Ann. d. Phys. 23. p. 1. 1907 bes. p. 18. Mit der spezifischen Intensität \mathfrak{R} hängt κ zusammen durch die Gleichung

$$\kappa = \frac{\mathfrak{R}}{n^2}.$$

nimmt, wenn man es ohne Energieverlust geometrisch-optisch ins Vakuum überführt. Die Energie dieses Strahlenbündels ist

$$n^2 f \omega \cos \vartheta \frac{l}{q} dv \cdot x,$$

seine Entropie beträgt

$$n^2 f \omega \cos \vartheta \frac{l}{q} dv \cdot L(x),$$

wobei $L(x)$ eine durch das Strahlungsgesetz gegebene, außer x und v nur die universellen Konstanten h , k und c ¹⁾ enthaltende Funktion ist.

Man sieht, daß alle Bestimmungsstücke außer x und v nur in der Verbindung

$$(1) \quad \sigma = n^2 f \omega \cos \vartheta \frac{l}{q} dv$$

vorkommen. Da wir ausschließlich mit ruhenden Körpern zu tun haben, so ist die Schwingungszahl v , daher auch dv bei allen zu betrachtenden Vorgängen unveränderlich. Das Gleiche gilt von der Zeitdauer l/q des Strahlenbündels in einem Punkt, da wir sie ohnehin als so groß annehmen müssen, daß etwaige von der zeitlichen Begrenzung herrührenden Anomalien nicht in Betracht kommen. Endlich aber ist nach dem Sinussatz bei allen geometrisch-optischen Vorgängen das Produkt $n^2 f \omega \cos \vartheta$ konstant, so daß dabei auch die Größe σ unverändert bleibt. Wir nennen sie in Anklang an den Sinussatz das *Sinusprodukt* des Strahlenbündels. Stimmen zwei Strahlenbündel in ihm überein, so bezeichnen wir sie als *geometrisch gleich*, weil man ihre geometrischen Bestimmungsstücke dann auf geometrisch-optischem Wege einander gleich machen kann.

Von der Funktion $L(x)$ brauchen wir im folgenden nur zu wissen, daß ihre erste Derivierte

$$L'(x) = \frac{1}{T} \text{ } ^2),$$

$$1) L(x) = \frac{k v^3}{c^2} \left\{ \left(1 + \frac{c^2 x}{h v^3} \right) \log \left(1 + \frac{c^2 x}{h v^3} \right) - \frac{c^2 x}{h v^3} \log \frac{c^2 x}{h v^3} \right\} \text{ nach}$$

dem Planckschen Strahlungsgesetz. Vgl. M. Planck, Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung. Leipzig 1906. Gleichung (229).

2) M. Planck, l. c., Gleichung (135).

also notwendig positiv, ihre zweite Derivierte

$$L''(x) = -\frac{1}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x}$$

dagegen notwendig negativ ist, weil $\partial T / \partial x$ stets positiv ist; ferner daß

$$L(0) = 0$$

ist. Diese Funktion wird also durch eine stets ansteigende, aber nach unten konkave, im Nullpunkt des Koordinatensystems beginnende Kurve graphisch dargestellt. Wie eine einfache geometrische Betrachtung lehrt, folgen aus dieser Eigenschaft die Ungleichungen:

$$(2) \quad L(x_1 + x_2) < L(x_1) + L(x_2),$$

$$(3) \quad L'(x) < \frac{1}{x} L(x).$$

Der erste der hier abzuleitenden Hilfssätze lautet nun: Es gibt keinen Vorgang, dessen einziges Ergebnis darin besteht, daß zwei geometrisch gleiche, inkohärente Strahlenbündel von gleicher Schwingungszahl sich zu einem ihnen geometrisch gleichen zusammensetzen. Bezeichnen wir nämlich ihre reduzierten spezifischen Intensitäten mit x_1 und x_2 , so ist $\sigma(L(x_1) + L(x_2))$ die Entropie vor dem Vorgang, während sie nach ihm den Wert $\sigma L(x_1 + x_2)$ haben müßte. Der letztere Betrag ist aber nach (2) der kleinere.

An zweiter Stelle zeigen wir die Unmöglichkeit eines Vorganges, der nichts weiter bewirkt als die Verkleinerung des Sinusproduktes σ bei einem Strahlenbündel. Da die Energie des Strahlenbündels $\sigma \cdot x$ dabei ungeändert bliebe, müßte sich nämlich seine Entropie $\sigma L(x)$ in demselben Sinn ändern wie die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x} L(x)$$

bei Vergrößerung ihres Argumentes x . Nun ist aber ihre Derivierte

$$f'(x) = \frac{1}{x} \left(L'(x) - \frac{1}{x} L(x) \right)$$

nach (3) negativ. Daher wäre auch dieser Vorgang mit einer Verminderung der Entropie verknüpft.

Eine Änderung von σ läßt sich nach (1) stets in eine Änderung des Öffnungswinkels ω allein im gleichen Sinn verwandeln; der letzte Satz beweist daher, daß die Einengung des Spielraumes für die Strahlrichtungen eine Zunahme an Geordnetheit und Abnahme an Wahrscheinlichkeit darstellt. Auch der erste der hier bewiesenen Sätze paßt zu dieser Auffassung.

In dem Folgenden wollen wir nachweisen, daß jedes Verfahren, die Beugung vollständig rückgängig zu machen, ein Mittel gibt, die hier als unmöglich erwiesenen Vorgänge zu verwirklichen.

§ 3. Die Unumkehrbarkeit der Beugung an einem kleinen, durchsichtigen Teilchen.

a) Fällt eine monochromatische elektromagnetische Welle von beliebiger Form in einem durchsichtigen Mittel auf ein in allen Dimensionen gegen die Wellenlänge kleines, durchsichtiges Teilchen von beliebiger Gestalt, so tritt in dessen Inneren ein elektrisches Feld auf, welches sich aus der zurzeit in seiner Umgebung herrschenden elektrischen Feldstärke der einfallenden Welle so berechnet, wie wenn diese zeitlich und räumlich konstant wäre. Das Teilchen nimmt ein gewisses, periodisch-veränderliches elektrisches Moment an und entsendet nach außen eine Kugelwelle wie ein schwingender Resonator. Dies, von Lord Rayleigh¹⁾ abgeleitete Resultat gilt auch für inhomogene und anisotrope Körper; seine Genauigkeit ist dadurch charakterisiert, daß die Quadrate der Verhältnisse $\frac{\text{Dimension}}{\text{Wellenlänge}}$ gegen 1 vernachlässigt sind. *Die für die Thermodynamik entscheidende Eigentümlichkeit des Vorganges liegt darin, daß die gebeugte Strahlung allein von der Richtung und Größe der elektrischen Feldstärke, nicht aber von der Fortpflanzungsrichtung der einfallenden Welle abhängt.*

b) Es soll jetzt ein monochromatisches, linear polarisiertes Strahlenbündel an dem Teilchen gebeugt werden. Die verschiedenen Strahlrichtungen in ihm bestimmen wir durch zwei Winkel, den Polabstand ψ und das Azimut φ , wobei wir die

1) Lord Rayleigh, Phil. Mag. (5) 43. p. 259. 1897.

Polrichtung durch die elektrische Feldstärke in irgend einem der Strahlen gegeben denken. Über den körperlichen Winkel ω machen wir zwecks einfacherer Darstellung die sachlich unwesentliche Annahme, daß er durch je zwei Flächen $\varphi = \text{const.}$ und $\psi = \text{const.}$ begrenzt ist; die Differenzen der Grenzwerte von φ und ψ sollen $\Delta\varphi$ und $\Delta\psi$ sein. Da Strahl und elektrische Feldstärke in einer ebenen Welle aufeinander senkrecht stehen, liegen alle Werte von ψ notwendig in der Nähe von $\pi/2$; infolgedessen ist

$$\omega = \iint \sin \psi \, d\psi \, d\varphi = \Delta\psi \cdot \Delta\varphi,$$

und nach (1) ist zugleich mit ω auch das Sinusprodukt σ proportional zu dem Spielraum $\Delta\varphi$ des Azimuts φ .

Die elektrische Feldstärke in einem bestimmten Punkte dieses Strahlenbündels hängt nun in keiner Weise von $\Delta\varphi$ ab. Denn alle die Strahlen, welche einem und demselben Wert ψ entsprechen, stimmen in der Richtung der elektrischen Feldstärke *genau* überein, gleichgültig welcher Wert von φ ihnen zukommt. Da die abgelenkte Strahlung nur von der elektrischen Schwingung am Orte des Teilchens abhängt, gilt dasselbe auch für sie.

Außer der aus dem Wege des einfallenden Bündels abgelenkten Strahlung entsteht aber ein Wellenkomplex, der die Fortpflanzungsrichtung des einfallenden Bündels hat und in diesem Sinne seine Fortsetzung ist, aber im allgemeinen nicht selbst als Strahlenbündel angesprochen werden kann; die Kompliziertheit der Interferenzerscheinungen zwischen den ursprünglichen Wellen und den aus ihnen entstehenden Kugellwellen gestattet dies wohl nur unter gewissen Umständen. Wie dem aber auch sein mag, soviel ist sicher, daß auch in ihm die elektrische Schwingung von $\Delta\varphi$ unabhängig ist. Wird er wiederum an einem kleinen Teilchen gebeugt, so gilt dasselbe von der jetzt entstehenden gebeugten Strahlung. Fährt man so fort, so erhält man neben einer Reihe gebeugter Strahlungen, die von $\Delta\varphi$ unabhängig sind, einen mehr oder minder komplizierten Wellenvorgang, dessen Energie sich durch genügend häufige Wiederholung des Vorganges beliebig herabsetzen läßt; denn jede Beugung entzieht ihm einen bestimmten

Bruchteil davon. Zum Schluß lassen wir ihn von einem schwarzen Körper absorbieren, dessen Temperatur wir so wählen, daß das gleichzeitig von ihm ausgehende Strahlenbündel ihm ebensoviel Energie entzieht, wie er absorbiert. Wegen mangelnder Kohärenz mit den gebeugten Wellen kommt dies für die Umkehrung der Beugung nicht in Betracht. Die dabei auftretende Entropiezunahme ist aber der beliebig kleinen Energiemenge entsprechend beliebig klein, spielt daher keine Rolle. Wir können dann sagen, daß der Einfluß von $\Delta\varphi$ durch die Beugung allein vollständig verschwunden ist.

Wäre die Beugung umkehrbar, so müßte es ein Verfahren geben, welches aus den abgebeugten Strahlungen ein dem einfallenden Strahlenbündel gleichwertiges, d. h. ihm geometrisch und in der Energie gleiches, kohärentes Bündel herstellt. Da keine Spur des Spielraumes $\Delta\varphi$ mehr vorhanden ist, müßte es dann aber nicht minder möglich sein, aus ihnen ein Bündel herzustellen, daß sich von dem ersteren *allein* durch einen anderen, etwa kleineren Spielraum $\Delta'\varphi$ für das Azimut φ unterscheidet. Der einzige Erfolg des Ganzen wäre dann wegen der Proportionalität von $\Delta\varphi$ und σ die Verkleinerung des Sinusproduktes σ bei einem Strahlenbündel, und nach § 2 verstieße ein derartiger Vorgang gegen den zweiten Hauptsatz. *Ein Verfahren, welches die Beugung an einem kleinen durchsichtigen Teilchen vollständig rückgängig machte, wäre daher zugleich ein Mittel zur Entropieverminderung, kann also nicht existieren.*

Ein Bedenken könnte vielleicht noch gegen die Benutzung des Grenzfalles unendlich kleiner Teilchen bestehen, weil doch in jedem konkreten Fall Abweichungen von ihm vorhanden sind, an denen bei der Beugung einer einzelnen Welle deren Fortpflanzungsrichtung, bei der Beugung eines Strahlenbündels der Spielraum $\Delta\varphi$ erkennbar ist. Sollte dieser Einwand imstande sein, unser Ergebnis umzustößen, so müßte es aber für die Spuren, die diese Größe bei der Beugung hinterläßt, wenn nicht eine von ihnen abhängige Invariante (analog dem in der geometrischen Optik invarianten Sinusprodukt), so doch wenigstens eine untere Grenze geben. Die obige Betrachtung zeigt, daß keine von beiden Forderungen erfüllt ist, daß man vielmehr diese Spuren in jedem beliebigen Maße verwischen kann. Sie können daher nichts für die Beugung Wesentliches sein.

Da die Beugung an kleinen Teilchen qualitativ mit der Zerstreuung durch einen Dipol übereinstimmt, so zeigen diese Betrachtungen auch die Irreversibilität des letzteren Vorganges. Der Beweis, den Hr. Planck in § 187 der oben zitierten Vorlesungen dafür gibt¹⁾, stammt aus der Zeit, da man das Additionstheorem der Entropie noch als unbedingt gültig ansah; da er wesentlich auf ihm beruht, wird er von dem in der Einleitung besprochenen Kohärenzeinwand getroffen.

In meinem Vortrag auf der 81. Naturforscherversammlung²⁾ habe ich für die Unumkehrbarkeit der Beugung an kleinen Teilchen einen auf denselben Grundlagen beruhenden, aber in der Form von dem hier durchgeführten verschiedenen Beweis gegeben. Diese Veränderung ist lediglich aus dem Grunde vorgenommen worden, daß der frühere bei der Ausführung aller Einzelheiten ein wenig länger geworden wäre.

§ 3. Die Unumkehrbarkeit der Beugung an großen Öffnungen.

a) Auf denselben Grundlagen läßt sich ein Beweis für die Unumkehrbarkeit der Beugung an großen Öffnungen erbringen; groß heißt dabei, daß sie in allen Dimensionen gegen die Wellenlänge groß sein sollen. Diejenige Eigenschaft dieser Beugungserscheinungen, welche wir dazu benutzen, ist dieselbe, durch welche sie das Auflösungsvermögen aller Instrumente begrenzt, die der optischen Abbildung von Gegenständen dienen (Fernrohr und Mikroskop). Man kann an dem durch die Öffnung hindurchtretenden Licht den körperlichen Winkel des auf diese auftreffenden Strahlenbündels nach Form und Größe nicht mehr erkennen, wenn er unterhalb eines gewissen von der Öffnung abhängenden Grenzwertes liegt. So unbestritten aber diese Tatsache in der praktischen Optik anerkannt wird, so könnte sie als Grundlage prinzipieller Erörterungen doch vielleicht bedenklich erscheinen, weil man zunächst zu der Ansicht neigt, daß diese Grenze sich durch Verbesserung der Instrumente, welche der Messung der strahlenden Energie dienen, beliebig herabsetzen läßt. Ist nämlich der mathematische

1) Ebenso M. Planck, Ann. d. Phys. 6. p. 818. 1901.

2) Vgl. das erste Zitat dieser Abhandlung.

Ausdruck für die Beugung einer Welle bekannt und kann man die Intensität des gebeugten Lichtes als Funktion der Richtung experimentell bestimmen, so ist die Ermittlung des Öffnungswinkels eine exakten mathematischen Methoden zugängliche Aufgabe.

Demgegenüber ist zu beachten, daß schon die Anwendung des für die Beugung von Sinuswellen abgeleiteten Ausdruckes auf die nur annähernd homogene Strahlung, welche wir in dem Spektralbereich der Wärmestrahlung stets vor uns haben, eine Ungenauigkeit enthält; exakt ließe sich das Beugungsproblem nur bei genauer Kenntnis der Wellenform lösen, und statt deren besitzen wir stets nur die Kenntnis der Intensität und der spektralen Breite. Daß diese Unbestimmtheit für die thermodynamische Anwendung belanglos ist, ist eine Folgerung aus der Hypothese der natürlichen Strahlung. Von der Ermittlung des sehr kleinen Öffnungswinkels eines Strahlenbündels nach der Beugung kann aber um so weniger die Rede sein, als sich die Schwingungsformen in den verschiedenen Wellen des Strahlenbündels noch sehr voneinander unterscheiden. Dazu kommt, daß es derselben Hypothese zufolge keinen Vorgang gibt, der die absolut genaue Messung strahlender Energie ermöglicht. Man kann sich daher auch in prinzipiellen Erörterungen unbedenklich der hergebrachten Ansicht anschließen, daß die Beugung die Spuren eines hinreichend klein gedachten Öffnungswinkels vollständig verwischt.

b) Von der Lichtquelle L soll nun ein monochromatisches, linear polarisiertes Strahlenbündel durch die Blende B auf die Hohlspiegel $S_1, S_2, \dots S_n$ fallen, welche in den Punkten $L_1, L_2, \dots L_n$ optische Bilder der Lichtquelle entwerfen. Ist die Blende so groß, daß die Beugung an ihr unbedeutend ist, vermeidet man ferner weiterhin alle Beugung an Spiegelrändern und ähnlichem, und reflektieren die Spiegel vollkommen, so ist der ganze Vorgang umkehrbar, da er der geometrischen Optik zugehört und ohne Absorption verläuft.

Nun aber bringen wir in den Spiegeln S_n Öffnungen O_n an, welche zwar nur einen kleinen Teil der Spiegelfläche fortnehmen, aber dennoch in allen Richtungen gegen die Wellenlänge groß und untereinander von gleicher Größenordnung sein sollen.

Ihre Lage und Form lassen wir beliebig. Den Öffnungswinkel des Strahlenbündels wählen wir so klein, daß bei der Beugung an jeder der Öffnung O_n sein Einfluß auf die gebeugte Strahlung verschwindet.

Durch die Öffnung O_1 tritt unter diesen Umständen die Strahlung, die auch bei der Beugung einer einzelnen Welle auftreten müßte. Das optische Bild in L_1 ist von der analogen Beugungserscheinung umgeben. Was durch O_1 hindurchtritt, ist schon weniger einfach zu beschreiben, weil außer dem vom optischen Bilde L_1 herstammenden Licht auch noch an O_1 gebeugtes auf sie fällt. Jedenfalls aber ist an dem hindurchgelangenden Licht auch keine Spur des Öffnungswinkels mehr zu erkennen; und dasselbe gilt für alle durch die Öffnungen O_n hindurchgehende Strahlung. Die in den Bildpunkten L_n konzentrierte Energie nimmt aber mit wachsendem n schließlich unter jede Grenze ab, weil ein bestimmter Bruchteil der in L_n vorhandenen durch die Öffnung O_{n+1} hindurchtritt, also nicht nach L_{n+1} gelangt. Lassen wir nach genügend häufiger Beugung den Rest wie in § 2 absorbieren, so ist dies eine der beliebig geringen Energiemenge entsprechend beliebig kleine Entropiezunahme, von der wir absehen können. Durch Beugung ist auch hier der Einfluß des Öffnungswinkels des einfallenden Strahlenbündels verwischt. Wie oben schließen wir daraus, daß jedes Verfahren, aus den gebeugten Strahlungen ein dem ursprünglichen gleichwertiges Strahlenbündel herzustellen, sich auch so verwenden lassen muß, daß dabei ein Strahlenbündel von kleinerem Öffnungswinkel, also kleinerem Sinusprodukt entsteht.

Fallen anfangs zwei getrennte, geometrisch gleiche, inkohärente Bündel von hinreichend wenig verschiedener Richtung auf die Blende B , so vermag man dennoch den durch die Öffnungen O_n hindurchtretenden Wellenkomplexen auf keine Weise ihre Doppelherkunft mehr anzusehen. Wäre die Beugung ein umkehrbarer Vorgang, so müßte sich daher aus ihnen ein Strahlenbündel herstellen lassen, das den beiden einfallenden geometrisch gleich ist, so daß der einzige Erfolg des Ganzen in der Vereinigung zweier inkohärenter Bündel bestände. Dies widerspricht aber ebenso wie die Verkleinerung des Sinusproduktes σ bei einem Strahlenbündel nach § 1 dem zweiten Hauptsatze.

Dah
klein
die
gren
wird
kom

eine
dure
sich
aber
gäng

kenn
Fall
bark
meh
untr
die
Einf
Fall
Eige
einze
viele
Desk
Zers
auch
sond
herr
Unte
eine

ist d
M. P
p. 74
1909

Daher ist die Beugung an großen Öffnungen ebenso wie die an kleinen Teilchen ein irreversibler Vorgang. Daß wir uns dabei die Öffnungen als durch vollkommen spiegelnde Schirme begrenzt gedacht haben, ist nicht wesentlich. Die Betrachtung wird nur wenig verwickelter, wenn man die letzteren aus vollkommen durchsichtigem Material bestehend annimmt.

Zugleich zeigt sich, daß der bekannte Unterschied zwischen einer durch geometrisch-optische Fehler entstellten und einer durch Beugung verwaschenen Abbildung — die erstere läßt sich noch in jedem beliebigen Maße verbessern, die letztere aber nicht — aufs engste mit der Stellung der optischen Vorgänge zum Entropieprinzip zusammenhängt.

Zusammenfassung.

Blicken wir auf den Gang der Untersuchung zurück, so erkennen wir als den beiden in entgegengesetztem Sinn extremen Fällen von Beugung gemeinsamen Grund für die Unumkehrbarkeit ihre Fähigkeit, Schwingungen, die anfangs in Form mehr oder minder weit getrennter Wellen vorhanden sind, untrennbar zu mischen. Daß diese Fähigkeit keineswegs auf die genannten Fälle beschränkt ist, bestätigt uns den in der Einleitung gezogenen Schluß von der Irreversibilität eines einzigen Falles von Beugung auf die der Beugung im allgemeinen. Diese Eigentümlichkeit findet sich nicht nur bei der Beugung an einem einzelnen Hindernis, sondern ebenso bei der Zerstreuung durch viele, gleiche, räumlich oder flächenhaft regellos verteilte Körper. *Deshalb sind die diffuse Spiegelung und Brechung, sowie die Zerstreuung in trüben Mitteln, irreversible Vorgänge;* die letztere auch dann, wenn sie nicht von eingelagerten, fremden Teilchen, sondern von den Molekeln eines optisch leeren Körpers selbst herrührt. Denn, wie in § 2 erwähnt, besteht kein qualitativer Unterschied zwischen der Einwirkung eines Dipols und der eines kleinen, durchsichtigen Körpers auf die Strahlung.¹⁾

1) Trotz der beträchtlichen Einwirkung der Molekeln aufeinander ist die Zerstreuung von der gegenseitigen Beeinflussung unabhängig. Vgl. M. Planck, Berliner Sitzungsber. 1902. p. 470; 1903. p. 480; 1904. p. 740; 1905. p. 382; R. Gans u. H. Happel, Ann. d. Phys. 29. p. 277. 1909, besonders § 3.

Die Sätze des § 1 legten die Deutung¹⁾ nahe, daß das Sinusprodukt σ bei gegebener Schwingungszahl und Energie ein Maß der Ungeordnetheit ist, daß also unter sonst gleichen Umständen die Wahrscheinlichkeit eines Strahlungsvorganges mit dem Spielraum für die Strahlrichtungen wächst. Der Erfolg eines Beugungsvorganges besteht nun meist in der Vergrößerung dieses Spielraumes, und da dies aufs engste mit der Fähigkeit der Beugung, anfangs getrennte Schwingungen zu mischen, zusammenhängt, so ist es sehr wahrscheinlich, daß eine zukünftige Statistik der Strahlung hierin den Grund für ihre Unumkehrbarkeit sehen wird.

München, Dezember 1909.

1) Diese läßt sich auch sonst stützen. Z. B. ist die spektrale Breite $d\nu$ umgekehrt proportional zu der Zeit, während welcher die Lichtschwingungen mit sich selbst kohärent bleiben; das in (1) auftretende Produkt $(l/q)d\nu$ gibt also an, wieviel derartige Zeiten hindurch das Strahlenbündel dauert, und man ist geneigt, die Geordnetheit als um so größer zu bezeichnen, je kleiner deren Zahl ist.

(Eingegangen 12. Dezember 1909.)

5. *Änderung des Leitvermögens von festem Kupferjodür im Licht;* *von Gerhardt Rudert.*

(Auszug aus der Jenaer Dissertation 1909.)

Einleitung.

A. Wirkungen der Strahlung auf den Widerstand fester Körper.

Änderungen des elektrischen Leitvermögens fester Körper durch Bestrahlung sind auf dreierlei Weise denkbar:

1. als sekundäre Folge der Erwärmung (Bolometerwirkung),

2. als sekundäre Folge einer photochemischen Reaktion. — Hierzu gehört z. B. der Seleneffekt, insofern das Licht das Gleichgewicht zwischen einer schlecht- und einer gutleitenden Modifikation zugunsten der letzteren verschiebt,

3. durch direkte Ionisation, analog solchen Erscheinungen in Gasen. Insbesondere können als Produkt einer durch die Bestrahlung bewirkten Dissoziation freie Elektronen auftreten. In dem Falle würde also metallisches Leitvermögen in dem Körper erzeugt. In diesem Sinne haben Scholl¹⁾ und Wilson²⁾ ihre an Jodsilber vorgenommenen Untersuchungen gedeutet.

Zur Entscheidung, welchem der drei Fälle ein bestimmter Effekt zukommt, können folgende *Kriterien* dienen:

a) Während in den Fällen 2. und 3. die Art der auffallenden Strahlung wesentlich in Frage kommt, ist die Bolometerwirkung nur abhängig von der Größe der aufgenommenen Gesamtenergie, ist also für einen bestimmten Stoff durch den Temperaturkoeffizienten seiner Leitfähigkeit gegeben.

Reaktionen nach 2. und 3. hingegen sind möglich, ohne daß der Widerstand eine Temperaturfunktion ist.

b) Wird die Leitfähigkeitsänderung hervorgerufen durch Produkte einer photochemischen Reaktion, so wird der zeitliche

1) H. Scholl, Habilitationsschr.; Ann. d. Phys. 16. p. 193, 417. 1905.

2) W. Wilson, Ann. d. Phys. 23. p. 107. 1907.

Verlauf der letzteren den jener Leitfähigkeitsänderung wesentlich mit bestimmen. Es wird somit meßbarer, unter Umständen beträchtlicher Zeit bedürfen, bis der Widerstand bei konstanter Fortdauer der Belichtung (frühestens mit der photochemischen Reaktion zugleich) einen stationären Zustand erreicht. Das Gleiche gilt, wenn nach Verdunkeln das System seinem ursprünglichen Zustande wieder zustrebt.

c) Nach den Anschauungen über den Mechanismus der in 3. angegebenen Vorgänge ist es wahrscheinlich, daß dieselben am Orte in unmeßbar kurzer Zeit ablaufen.

Im Sinne der unter 2. oder 3. zusammengefaßten Fälle sei in folgendem von dem Ausdruck „rein photochemischer“ bzw. „rein photoelektrischer“ Effekt Gebrauch gemacht.

Unter den angegebenen Gesichtspunkten soll die am Kupferjodür gefundene Erscheinung der Leitfähigkeitsänderung bei Belichtung betrachtet und eine Entscheidung versucht werden. Weiterhin wird die Abhängigkeit des Effektes von den äußeren Umständen (Wellenlänge, Intensität, Jodkonzentration, Temperatur) eingehender untersucht und soweit als möglich im Sinne der gemachten Annahme erklärt werden.

B. Historisches.

In Anbetracht der Bedeutung, welche die analogen Beobachtungen an Silberhaloiden für die vorliegenden Untersuchungen haben mußten, sei von jenen das Wichtigste angeführt.

Durch Arrhenius¹⁾ wurde bekannt, daß Silberhaloide im Licht ihre Leitfähigkeit stark steigern.

Eine sehr eingehende Untersuchung fanden diese Erscheinungen an feuchtem Silberjodid durch H. Scholl.²⁾ Derselbe zeigte

1. daß die Entstehung der Leitfähigkeit im Licht in außerordentlich kurzer Zeit beendet ist,

2. daß die Träger der Elektrizitätsleitung eine so große Geschwindigkeit im elektrischen Felde haben, wie sie von

1) S. Arrhenius, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien, Mathem.-naturw. Kl. 96. p. 831. 1887.

2) H. Scholl, Habilitationsschr. I. c.

materiellen Ionen nicht zu erwarten ist, daß sie also wohl als freie Elektronen anzusprechen sind,

3. daß die Größe dieses Effektes der Lichtabsorption parallel geht und im Violett ein Maximum ist,

4. daß der Effekt durch freies Jod beträchtlich gesteigert wird,

5. daß durch violette Belichtung neben dem genannten Effekt ein Vorgang erfolgt, durch den die Empfindlichkeit gegen langwelliges Licht vorübergehend stark gesteigert wird.

C. Grundlagen zur Behandlung des Effektes an CuJ.

K. Bädeker¹⁾ fand an Kupferjodür das eigentümliche Phänomen, daß dieser Stoff durch Zufügen freien Jods metallisches Leitvermögen erhält. Da nun am AgCl und AgBr, sowie am feuchten AgJ Abspaltung freien Jods durch das Licht sicher nachgewiesen, also auch am CuJ zu erwarten ist, so konnte man hieraus, sowie aus der Tatsache, daß Jodzusatz bereits in minimaler Konzentration das Leitvermögen des CuJ stark vergrößert, eine Zunahme dieses Leitvermögens auch bei Belichtung vermuten. Außerdem mußte aber nach Analogie zum AgJ mit der Möglichkeit eines primär photoelektrischen Vorganges gerechnet werden. Diese Vermutungen wurden auf Anregung des Hrn. Dr. Bädeker geprüft und bildeten den Ausgangspunkt der folgenden Untersuchung, die unter Leitung des Hrn. Bädeker ausgeführt wurde.

Die Beobachtung ergab in der Tat am CuJ sofort eine *außerordentlich kräftige Wirkung des Lichtes auf die Leitfähigkeit*, die im Dunkeln wieder zurückging. Es sei aber schon hier bemerkt, daß vorläufig weder der momentane Anstieg der Leitfähigkeit im Licht, noch die Sensibilisierung durch Vorbelichtung am CuJ festgestellt werden konnten, trotz einiger darauf abzielender Versuche. Es ist vorläufig noch nicht zu sagen, ob und inwieweit sich die Beobachtungen von Scholl direkt mit den an CuJ beobachteten Erscheinungen vergleichen lassen. Da die Absorptionskurve des CuJ ihr Maximum jedenfalls bei kleinerer Wellenlänge hat, als die des AgJ, so würden

1) K. Bädeker, Ann. d. Phys. 29. p. 566. 1909.

analoge Erscheinungen zu den von Scholl beobachteten vielleicht in anderen Spektralbereichen zu finden sein.

Beschränkt man sich aber auf die Annahme eines rein photochemischen Vorganges, so ergeben sich die Grundlagen der theoretischen Behandlung:

1. aus den *photochemischen Gesetzen*, welche die Menge des gebildeten Jods als Funktion der Zeit, Lichtstärke usw. angeben,

2. aus den *Beziehungen zwischen Jodkonzentration und Leitfähigkeit*, worüber von Bädeker¹⁾ einige Angaben vorliegen.

D. Die Versuchsobjekte.

Die Herstellung sämtlicher verwandter Kupferjodürpräparate geschah in der Weise, daß auf einer Glasplatte durch kathodische Zerstäubung ein Kupferspiegel aufgebracht wurde, den man durch Einwirkung von Joddampf in CuJ überführte.²⁾ An den Enden der Glasunterlage eingebrannte Platinspiegel dienten als Elektroden. Sie wurden mit Stanniol umgeben und in Messingklammern gepreßt.

Die Kupferjodürschichten, 100 bis 300 μ dick, waren vollkommen durchsichtig. Wegen der Unbeständigkeit an feuchter Luft befindlicher Präparate gegen Gleichstrom wurden die Schichten entweder im Vakuum in Gegenwart von Natriummetall oder in einem durch Phosphorsäureanhydrid getrockneten Wasserstoffvakuum untergebracht. Das evakuierte Gefäß, in welches das Licht durch ein Quarzfenster Zutritt hatte, war in einen lichtdichten Kasten eingebaut.

Das Präparat nahm in dieser Umgebung einen viel höheren Widerstand an als an Luft. Gegen Gleichstrom verhielt es sich nunmehr vollkommen indifferent. Das eine Bedenken könnte gegen diese Art der Aufbewahrung erhoben werden, nämlich, daß bei dieser Anordnung dem im Lichte gebildeten Jod der Austritt aus der Schicht sehr erleichtert wird, so daß die Versuche nicht reproduzierbar bleiben. Dem ist entgegenzuhalten, daß nach wiederholter Belichtung der Dunkelwiderstand sich nicht änderte, wenn die Belichtung nicht über zu große Zeiten ausgedehnt

1) K. Bädeker, l. c. p. 569.

2) Näheres hierüber bei A. Mey, Diss. p. 27, 29. Leipzig 1906.

wurde. Immerhin muß zugegeben werden, daß die Herstellung von Präparaten, bei denen das Jod die Schicht überhaupt nicht verlassen kann, die aber zugleich im Gleichstrom beständig sind, auch im Sinne der vorliegenden Versuche einen beträchtlichen Fortschritt bedeuten würde.

I. Das Leitvermögen von CuJ im Licht und im Dunkeln ist metallisch.

Obleich auch im hohen, gut getrockneten Vakuum das Dunkelleitvermögen von CuJ stets meßbare Beträge hatte, so ist doch wahrscheinlich, daß reines CuJ im Dunkeln einen praktisch unendlich großen Widerstand besitzt, und ein Leitvermögen im Dunkeln, durch Anwesenheit von Jod (vielleicht auch Sauerstoff) hervorgerufen, als ein metallisches angesehen werden darf.¹⁾

Auch bei belichtetem CuJ war Polarisierung oder Zersetzung nicht zu bemerken, weshalb metallisches Leitvermögen auch hier anzunehmen ist. Diese Ansicht wurde insbesondere noch bestätigt durch einen Versuch, Änderungen des Kontaktpotentials zwischen Platin und Kupferjodür durch Belichten aufzufinden, der ein negatives Resultat ergab.

Eine 5 cm lange, 1 cm breite Glasplatte wurde bis auf einen 1 cm breiten, durch die Mitte gehenden Streifen platinisiert und darauf mit einer Kupferjodürschicht überzogen, jedoch so, daß an den Enden der Platte je ein 1 cm breiter Streifen der Platinunterlage von der Schicht frei blieb. An diesen Stellen wurden die Zuleitungsklemmen angesetzt. Das Präparat brachte man in beschriebener Weise im Vakuum unter. Nun wurde die eine der Berührungsflächen Platin-Kupferjodür dem Lichte ausgesetzt, während die andere dunkel blieb, und eine Potentialdifferenz zwischen heller und dunkler Elektrode festzustellen versucht. Eine solche wäre an den Enden der im Dunkeln metallischen Kette zu erwarten gewesen analog den Becquerel-

1) Es sei bemerkt, daß ein Leitvermögen der Glasunterlage nach Entfernen der Schicht bereits an Luft mit meiner Anordnung nicht nachweisbar war, also hierbei keine Rolle spielen kann.

schen Belichtungspotentialen¹⁾, wenn die im Licht entstandene Leitfähigkeit elektrolytisch wäre.

Indessen zeigte ein empfindliches Elektrometer, mit dessen Quadrantenpaaren die freien Platinenden verbunden wurden, höchstens 0,00074 Volt an, als die eine Hälfte des Präparates mit intensivem Bogenlichte bestrahlt wurde. Diese Potentialdifferenz läßt sich vollkommen auf einen Thermoeffekt zurückführen, welcher an diesem System²⁾ $> 2 \cdot 10^{-4}$ Volt/Grad, bei einer Temperaturdifferenz von 3 bis 4 Grad die beobachtete Potentialdifferenz erzeugt.

Das Leitvermögen des CuJ ist somit im Dunkeln wie im Licht als ein metallisches anzusprechen.

II. Zeitlicher Verlauf der Leitfähigkeitsänderung.

A. Vernachlässigung von Diffusionsvorgängen.

Zunächst ist die Frage zu entscheiden, ob der zur Beobachtung gelangte zeitliche Verlauf der Leitfähigkeitserhöhung auch dem der am Orte vor sich gehenden entspricht, oder ob ihn etwa Diffusionsvorgänge wesentlich mitbestimmen. Würde z. B. das im Licht gebildete Jod bzw. die entstehenden freien Elektronen *langsam* von dem Orte ihrer Entstehung (Lichtseite der Schicht) nach den Stellen geringerer Konzentration hin diffundieren, so wäre dadurch eine außerordentliche Komplikation der Vorgänge möglich.

Aus folgenden Gründen ist jedoch ein wesentlicher Einfluß der Diffusion wenig wahrscheinlich:

1. Die Schicht ist in der Richtung der Lichtstrahlen äußerst dünn.

2. Die Stromrichtung steht senkrecht auf der Richtung der Lichtstrahlen; also die Schichten gleicher Konzentration (Lichtintensität) sind parallel geschaltet.

3. Die Diffusionsgeschwindigkeit der Elektronen, welche zunächst in Frage käme, ist nach den Ergebnissen von H. Scholl

1) Vgl. H. Scholl, Habilitationsschr. I. c. p. 194.

2) K. Bädeker, I. c. p. 582.

auch in festen Körpern außerordentlich groß; der Konzentrationsausgleich erfolgt also sehr rasch.

4. Die Diffusionsgeschwindigkeit von Jod in CuJ ist, nach der Geschwindigkeit der Umwandlung eines Kupferspiegels im Joddampf zu urteilen, wahrscheinlich ziemlich beträchtlich.

Wir werden somit bei den Untersuchungen des zeitlichen Verlaufes Diffusionsvorgänge unberücksichtigt lassen.

Es sei noch besonders darauf hingewiesen, daß ein Momentaneffekt am Orte allein nach 2., wenigstens zum Teil auch als momentane Leitfähigkeitsänderung in die Erscheinung treten muß.

B. Verlauf des Effektes bei Belichtung und nach Verdunkeln.

Versuche, welche den zeitlichen Verlauf des Vorganges zeigten, wurden sowohl an gewöhnlichen oder durch aufgelegte Glimmerplatten fixierten¹⁾ Präparaten angestellt, als auch an solchen, die in der (Einl. D.) angegebenen Weise aufbewahrt waren. Die Widerstandsmessung geschah an ersteren gewöhnlich mit Brücke, Wechselstrom und Telephon, an letzteren einfach dadurch, daß das Präparat samt einem Galvanometer und einer kleinen elektromotorischen Kraft in einen Stromkreis eingeschaltet wurde.

Der Verlauf war in allen Fällen der folgende:

1. Der Widerstand näherte sich beim Belichten asymptotisch einem Grenzwerte, welcher je nach den Umständen in 5 bis 20 Min. praktisch erreicht zu sein schien.

2. Nach Verdunkeln strebte der Widerstand in ähnlicher Weise seinem ursprünglichen Werte zu, jedoch stets erheblich langsamer, als er sich während der Belichtung von ihm entfernt hatte.

Dieses Verhalten entspricht offenbar dem Falle 2., Einl. A, und ist als Folge einer Abspaltung freien Jods durch das Licht zu deuten.

C. Momentane Lichtwirkung.

Es ist ferner möglich, daß der langsame Effekt einem momentan verlaufenden superponiert ist (Einl. C). Letzterer

1) K. Bädeker, l. c. p. 576.

sollte sich dann durch eine Untersuchung des Reaktionsverlaufes unmittelbar nach Beginn der Belichtung nachweisen lassen.

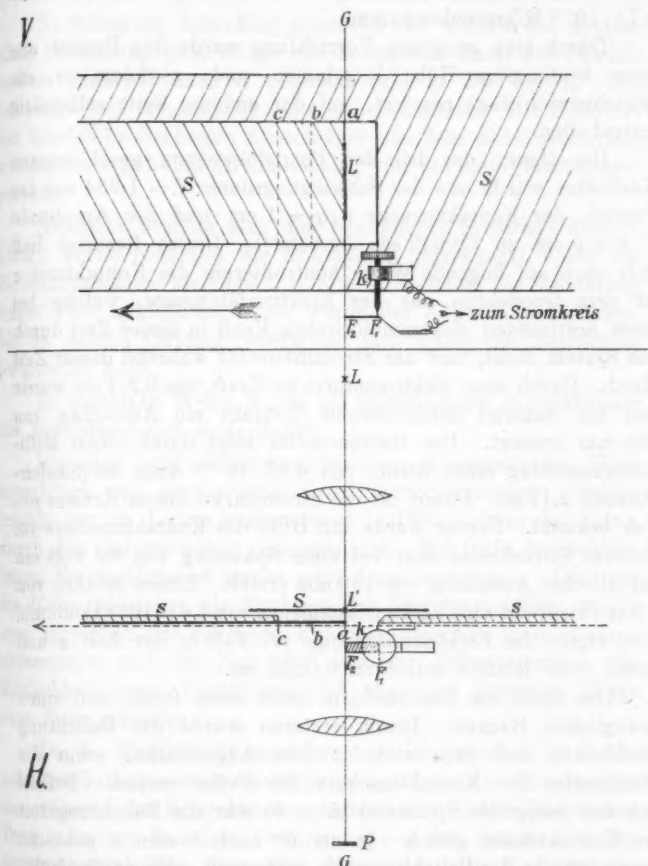
1. Um eine solche Untersuchung möglich zu machen, mußte ein Kontaktmacher konstruiert werden, der das Präparat während einer beliebigen, vorgeschriebenen Phase der Belichtung für sehr kurze, aber genau bestimmte Zeit in den Kreis eines Galvanometers und einer elektromotorischen Kraft einschaltete. Der ballistische Ausschlag lieferte dann direkt den gesuchten Widerstand nach entsprechender Eichung. Folgende Konstruktion (Fig. 1) erwies sich als brauchbar:

Ein Pendel von beträchtlicher Masse trug an seiner Stange einen schwarzen Schirm (ss), dessen Ebene mit der Schwingungsebene des Pendels (durch die gestrichelte Linie im Grundriß angedeutet) zusammenfiel und der mit einem vertikalen, verschiebbaren Spalt versehen war. Eine in eine Platinspitze auslaufende, in vertikaler Richtung verstellbare Schraube (h) war gut isoliert gleichfalls an dem Schirme angebracht. Kurz bevor das Pendel die Gleichgewichtslage (GG) passierte, kam diese Platinspitze mit dem Ende F_1 der Feder F_1F_2 in Berührung, die, ebenfalls gut isoliert, an dem Pendelgestell befestigt war. Im Punkte F_2 wurde dieser Kontakt wieder aufgehoben. Durch diese feste Kontaktstrecke F_1F_2 war die Kontaktdauer ein für allemal vorgeschrieben. Die Feder besaß eine möglichst kurze Schwingungsdauer und war in geeigneter Weise gebogen, wodurch einer Unsicherheit des Kontaktes infolge Klirrens nach Kräften vorgebeugt war. Fehler infolge ungenügend festen Kontaktes waren bei der angewandten Spannung von 30 Volt nicht zu befürchten.

Das Licht lieferte eine Nernstlampe (1 Amp., 110 Volt, ca. 100 HK.), die mit einer Akkumulatorenbatterie von konstanter Spannung gespeist wurde. Eine Linse entwarf zunächst von dem vertikalen Nernststifte L ein Bild (L') auf einem Spalt (S), der das von dem Hintergrunde des Brenners reflektierte Licht ausblendete. Dicht hinter demselben befand sich der Pendelschirm, dem Lichte zeitweise den Durchgang durch die verstellbare Öffnung gestattend. Das Licht fiel nunmehr auf eine zweite Linse, die von dem Bilde L' ein vergrößertes Bild auf dem Kupferjodürpräparat (P) entwarf. Letzteres war in der beschriebenen Weise gewonnen und auf-

bewahrt und besaß in der Stromrichtung eine Breite von 0,07 cm.

V.



H.

Die festen Teile sind mit großen, die mit dem Pendel beweglichen mit kleinen Buchstaben bezeichnet.

Fig. 1.

Der zur Widerstandsmessung dienende Stromkreis enthielt eine elektromotorische Kraft von 30 Volt, das Präparat, den

beschriebenen Kontaktmacher und ein d'Arsonvalsches Galvanometer mit einer ballistischen Empfindlichkeit von $9,73 \cdot 10^{-3}$ Mikrocoulomb/mm.

Durch eine geeignete Vorrichtung wurde das Pendel aus einer bestimmten Höhe losgelassen und, nachdem es die Gleichgewichtslage passiert, auf der anderen Seite selbsttätig festgehalten.

Die Dauer des bei der Pendelbewegung geschlossenen Kontaktes wurde aus der Schwingungsdauer $T = 1,934$ sec des Pendels, der Kontaktstrecke $r \cdot \varphi = 1$ cm und der Amplitude $r \cdot A = 9$ cm zu $0,0342$ sec berechnet. Dieses Resultat ließ sich noch auf folgende Weise kontrollieren: die Kontaktzeit τ ist dem Quotienten aus der Elektrizitätsmenge, welche bei einer bestimmten elektromotorischen Kraft in dieser Zeit durch das System fließt, und der Stromintensität während dieser Zeit gleich. Durch eine elektromotorische Kraft von $0,2$ Volt wurde nun bei dauernd geschlossenem Kontakt ein Ausschlag von 208 mm erzeugt. Das Galvanometer zeigt durch einen Millimeterausschlag einen Strom von $6,67 \cdot 10^{-10}$ Amp. an (Skalenabstand $2,11$ m). Damit ist die Stromstärke dieses Kreises *pro Volt* bekannt. Ferner wurde mit Hilfe des Kontaktmachers im gleichen Stromkreise aber bei einer Spannung von 30 Volt ein ballistischer Ausschlag von 150 mm erzielt. Einem solchen von 1 mm entspricht eine Elektrizitätsmenge von $4,61 \cdot 10^{-9}$ Coulomb. Dies ergibt die Elektrizitätsmenge *pro Volt* in der Zeit τ und damit diese letztere selbst zu $0,0332$ sec.

Der Spalt am Pendelschirm hatte einen festen und einen beweglichen Backen. Durch ersteren wurde die Belichtung geschlossen und zwar stets in dem Augenblicke, wenn die Platinspitze des Kontaktmachers die Feder verließ. Befand sich der *bewegliche* Spaltrand in a , so war die Belichtungszeit der Kontaktdauer gleich. Indem er nach b oder c gebracht wurde, wurde die Belichtungszeit verdoppelt oder verdreifacht.

Als Anfang und Schluß der Belichtung gilt die Stellung des Pendels, bei der das Bild des in den Strahlengang ein- bzw. aus ihm austretenden Spaltrandes über die Mitte des Kupferjodürpräparates hinweggeht. Übrigens wurde durch die Vergrößerung des Lichtbildes hinter dem Spalt, sowie die geringe Breite der Schicht bewirkt, daß die Zeit, welche zur

Abrollung des Lichtbildes auf dem Präparate nötig war, nur 1,5 Proz. der kürzesten Belichtungszeit ausmachte.

Nachdem der Ausschlag gemessen war, welchen das System ohne Belichtung gab, wurde der bewegliche Rand des Pendelspaltes zunächst nach *a* gebracht (wie in der Fig. 1). Belichtungs- und Kontaktzeit fielen also zusammen. Die Differenz des hierbei beobachteten Ausschlages von dem ohne Belichtung erhaltenen ergab den „Hellausschlag“ für die erste Belichtungsperiode.

Nunmehr brachte man den beweglichen Spaltrand nach *b*. Damit wurde (während die Kontaktzeit ungeändert blieb) die Belichtungsdauer verdoppelt, d. h. erst nachdem die Belichtung schon τ sec angedauert hatte, wurde der Kontakt geschlossen, bis zu dessen Öffnung (wiederum nach τ sec) die Belichtung fortgesetzt ward.

In derselben Weise wurde bei beibehaltener Kontaktdauer die Belichtungszeit verdreifacht.

Die den drei Belichtungsperioden zukommenden Hellausschläge sind proportional den Elektrizitätsmengen, welche infolge der im Lichte entstandenen Leitfähigkeit in der Zeit τ durch das Galvanometer gegangen sind. Mit Hilfe der ballistischen Empfindlichkeit lassen sich diese berechnen. Um nun die *Helleitfähigkeiten* als Funktion der Zeit darzustellen, müßte man eigentlich die bekannte Funktion zwischen jenen *Elektrizitätsmengen* und der Zeit nach letzterer differenzieren. Die Einfachheit jener Funktionen ließ aber auf kürzerem Wege zum Ziele gelangen:

Da die Kontaktzeit stets konstant ist, so sind die beobachteten Galvanometerausschläge proportional den Mittelwerten der während der Kontaktdauer auftretenden Helleitfähigkeiten. Trug man nun dieselben, während $t = 0$ den Beginn der Belichtung darstellte, über den *Mitten* der die Kontaktdauer repräsentierenden Zeitstrecken als Ordinaten auf, so bildete die Verbindungslinie der erhaltenen Punkte mit dem Koordinatenanfang angenähert eine Gerade. Die Beziehung zwischen Helleitfähigkeit und Zeit ist somit in diesem Bereich nahezu linear, und zwar geht die Gerade durch den Nullpunkt der *Helleitfähigkeiten* und der *Belichtungszeit*.

Da Fig. 7 p. 594 auf ganz gleiche Weise gewonnene Kurven zeigt, ist an dieser Stelle auf eine zahlenmäßige Festlegung der Resultate verzichtet.

Dieses Ergebnis lehrt, daß eine *plötzliche Leitfähigkeitsänderung* bei eintretender Belichtung, wenigstens bei diesen *Präparaten mit sehr hohem Dunkelwiderstand*, wenn überhaupt, so *nur in verschwindender Größe vorhanden* sein kann.

2. Das vorliegende Ergebnis bezieht sich ausschließlich auf Präparate, welche, nach den Angaben in Einl. D. aufbewahrt, außerordentlich wenig Jod enthielten. Da jedoch der photoelektrische Effekt an AgJ in Gegenwart von Jod stark zunahm, ja vielleicht die Anwesenheit von Jod bedingte, so waren entsprechende Versuche auch an jodreicheren Präparaten notwendig. Nun ließ sich zwar auf solche Präparate die soeben verwandte Methode nicht anwenden. Indessen wurde hier ein einigermaßen befriedigendes Ergebnis auf folgende Weise erhalten:

Da die Schollsche Lichtwirkung eben die Eigenschaft hat, daß sie nach jeder meßbaren Belichtungsdauer ihren Endwert bereits erreicht hat, so stellt die nach jeder endlichen Belichtungsdauer erreichte Leitfähigkeitsänderung einen oberen Grenzwert für die mögliche Größe dieser Momentanwirkung dar. Es handelt sich nun darum, durch Verkürzung der Belichtungsdauer diesen Grenzwert möglichst herabzudrücken. Da der Dunkelausschlag wegen der Unbeständigkeit der Präparate im Gleichstrom unzuverlässig war, so mußten möglichst große Hellausschläge erzielt werden, d. h. man konnte in der Belichtungsdauer nicht weit unter 1 sec herabgehen.

Belichtungszeit und Kontakt regelte wiederum das Pendel, welches zu diesem Zwecke so abgeändert wurde, daß beide Zeiten etwa 1 sec betrugen, aber stets die gleiche Länge hatten.

Ein Schirm, welcher für gewöhnlich die Lichtstrahlen aufhielt, wurde bei der Pendelbewegung in der einen Richtung aus dem Strahlengange entfernt und beim Rückgange des Pendels an seinen früheren Platz gebracht. Gleichzeitig bewirkte ein mit dem Schirm verbundener Platinstift den Kontakt durch Eintauchen in ein Quecksilbernäpfchen, solange die Lichtstrahlen nicht von dem Schirme aufgefangen wurden. Natürlich

fehlte bei dieser Anordnung die Vorrichtung, welche das Pendel nach einmaligem Durchlaufen der Gleichgewichtslage festhielt; dafür befand sich eine solche auf der Seite, von der das Pendel losgelassen wurde.

Das Licht gelangte in gleicher Weise, wie beim vorigen Versuch, zur empfindlichen Schicht.

Als Versuchsobjekt mit konstantem Jodgehalt diente eine der bereits genannten fixierten Schichten. Dieselben behielten über längere Zeit ihren Widerstand bei, besaßen aber, wie schon erwähnt, den Nachteil, daß sie sich wahrscheinlich wegen nicht genügender Trockenheit im Gleichstrom veränderten.

Wegen des relativ geringen Dunkelwiderstandes der Schicht mußte der Dunkelstrom kompensiert werden (Fig. 2). Der Kom-

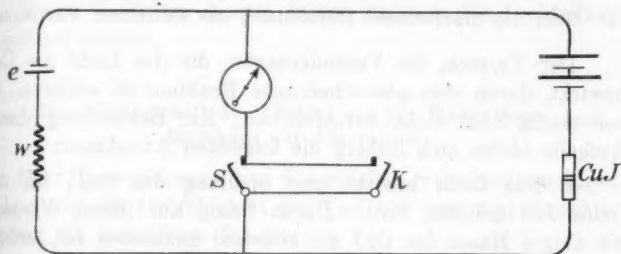


Fig. 2.

pensationsstromkreis enthielt eine kleine elektromotorische Kraft (e) und einen veränderlichen, zugleich zur Messung des Dunkelleitvermögens der Schicht dienenden Widerstand (w). Durch den Schlüssel S konnten beide Stromkreise gleichzeitig geschlossen werden. Durch Variieren des Widerstandes w wurde darauf der Dunkelstrom kompensiert. Die beiden Enden des Schlüssels S waren mit dem Platinstift bzw. dem Quecksilbernäpfchen des Kontaktmachers K verbunden. Durch letzteren wurde der Kontakt während der Belichtung bewirkt, während welcher der Schlüssel S geöffnet blieb.

Der Dunkelwiderstand der Schicht hatte ungefähr den 100fachen Betrag der gleichen mit Jod gesättigten.

Die Messung der Helleitfähigkeit war aus dem angegebenen Grunde bei weitem nicht auf den gleichen Grad der Zu-

verlässigkeit zu bringen, wie die an jodfreien Präparaten. Immerhin konnte festgestellt werden, daß der Mittelwert der durch die Sekundenbelichtung bewirkten Leitfähigkeitsänderung nur ca. $\frac{1}{1000}$ einer durch Dauerbelichtung erreichten betrug.

Also auch in Gegenwart von Jod ist ein maßgebender Einfluß eines Momentaneffektes auf die gesamte Lichtwirkung nicht vorhanden. Die negativen Ergebnisse des Versuches, auf diese Weise einem Effekt auf die Spur zu kommen, der der vornehmlichen Lichtwirkung an AgJ an die Seite gestellt werden könnte, gaben die Veranlassung, bei den weiteren Untersuchungen von der Annahme eines rein photoelektrischen Effektes abzusehen.

D. Über die theoretische Darstellung des zeitlichen Verlaufes.

Der Versuch, die Veränderungen, die das Licht am CuJ bewirkt, durch eine photochemische Reaktion zu erklären, ist vollständig noch nicht durchführbar. Zur Behandlung dieser Aufgabe bieten sich bislang die folgenden Annahmen:

1. Das Licht bewirkt eine Spaltung des CuJ, bei der freies Jod gebildet wird. Da in bezug auf diesen Vorgang die aktive Masse des CuJ als konstant anzusehen ist, erfolgt die Bildung des Jods bei konstanter Lichtstärke proportional der Zeit. Die Wandlungskonstante der Reaktion ist von der Lichtstärke abhängig.

2. Die Rückbildung des CuJ aus den Spaltungsprodukten erfolgt nach dem Massenwirkungsgesetze proportional dem Produkt aus den aktiven Massen dieser Spaltungsprodukte. Auf diese Reaktion hat das Licht keinen Einfluß.

3. Für die entstehende Leitfähigkeit ist *allein* die Jodkonzentration bestimmend nach Maßgabe der bei der Einwirkung freien Jods (l. c.) erhaltenen Ergebnisse.

Danach ist die Leitfähigkeit \propto proportional der 5. bis 6. Wurzel aus der Konzentration x des undissoziiert bleibenden Jodgehaltes. Also

$$\kappa = \text{const.} \times \sqrt[n]{x} \quad 5 < n < 6.$$

Die Leitfähigkeit ist weiter proportional der Anzahl freier

Elektronen, kann also proportional der Konzentration x' des dissoziierten Jodanteils gesetzt werden, so daß

$$x = \text{const.} \times x'.$$

Da

$$x + x' = X$$

die Menge des gesamten Jods ausdrückt, so ergibt sich für dieselbe

$$X = c_1 x + c_2 x.$$

Die Schwierigkeit, hiernach die Vorgänge darzustellen, liegt darin, daß das Jod im CuJ bei der Erzeugung der Leitfähigkeit selbst einem Dissoziationsprozeß unterliegt, daß also nur der undissoziierte Jodanteil bei dem Rückbildungsprozeß des CuJ als aktive Masse einzuführen ist.

Dieses Verhalten konnte jedoch nicht in die Darstellung eingeführt werden.

III. Abhängigkeit des Effektes von der Wellenlänge. Beziehung zur Absorption.

Die Untersuchung der Einwirkung verschiedenwelligen Lichtes auf die Leitfähigkeit des CuJ hat von drei Gesichtspunkten ein besonderes Interesse:

1. zur sicheren Unterscheidung des Effektes von der Wärmewirkung;
2. zur Vergleichung des Effektes mit der optischen Absorption;
3. um ein der Wirkung violetter Vorbelichtung am AgJ entsprechendes Verhalten in irgend einem Spektralbereich aufzufinden.

Prinzip der Messung war, in allen Gebieten des Spektrums eine bestimmte gleiche Energiemenge auffallen zu lassen. Es war somit erforderlich: ein Bolometer zur Messung der auffallenden Intensität und ein Spektralapparat mit einer Vorrichtung zum Regulieren der Intensität.

A. Versuchsanordnung.

Die Verwendung eines einfachen Spektralapparates erwies sich zur Erzeugung homogenen Lichtes für den vorliegenden

Fall als vollkommen unbrauchbar, da das erhaltene Licht bei weitem nicht rein genug war; denn gerade in dem Teile des Spektrums — violett bis ultraviolett —, wo der zu messende Effekt am größten ist, ist die bolometrische Wirkung der Strahlung so klein, daß sie nur bei peinlichem Ausschluß langwelligeren Lichtes zuverlässig zu messen ist.

Als wirklich brauchbarer Spektralapparat erwies sich der sogenannte Prismenfilter, konstruiert nach den Angaben von Hrn. Dr. Lehmann¹⁾, dem ich auch an dieser Stelle für seinen Rat meinen Dank aussprechen möchte.

Der Prismenfilter, der einen Teil des in Fig. 3 skizzierten Apparates bildet, funktioniert in folgender Weise: Der leuchtende Spalt L wird durch den Spektralapparat mit dem Prisma P_1 in S zum Spektrum ausgebreitet. Ein schmaler, durch den Spalt S hindurchgelassener Bereich desselben wird durch einen zweiten Spektralapparat nochmals zerlegt, so daß das von dem stark beleuchteten Prisma P_1 diffus ausgesandte Licht von anderer als der gewünschten Wellenlänge von dem vor T angebrachten Spalt abgefangen werden kann. Nach der Angabe von Hrn. Dr. Lehmann wurden zu beiden Seiten des Spaltes S zwei weitere Linsen angebracht, welche den Zweck hatten, den Umfang der in der Strahlenrichtung vorhergehenden Linse auf dem der folgenden abzubilden.

Die Anordnung des doppelten Spektralapparates bietet aber noch einen weiteren Vorteil. Sorgt man nämlich dafür, daß der Apparat völlig symmetrisch in bezug auf die Ebene S ist, so bleibt das in T erzeugte Spaltbild immer an der nämlichen Stelle, wie man auch den Spalt S verschieben mag. Denn, würde letzterer überhaupt entfernt, so würde in T ein weißes symmetrisches Bild von L erzeugt. Der Spalt S bewirkt, daß dieses Bild in der von ihm durchgelassenen Farbe erscheint. Der Umstand, daß die Öffnung des zweiten Spektralapparates nur für eine bestimmte Lichtart vollkommen ausgenutzt werden kann, wenn beide Spektralapparate unbeweglich sind, tritt hier nicht als Nachteil auf. Man gab den günstigsten Strahlengang dem äußersten Violett, dessen Intensität am geringsten ist.

1) H. Lehmann, Ann. d. Phys. 5. p. 638. 1901.

Dann mußte die Intensität des langwelligen Lichtes obendrein verkleinert werden.

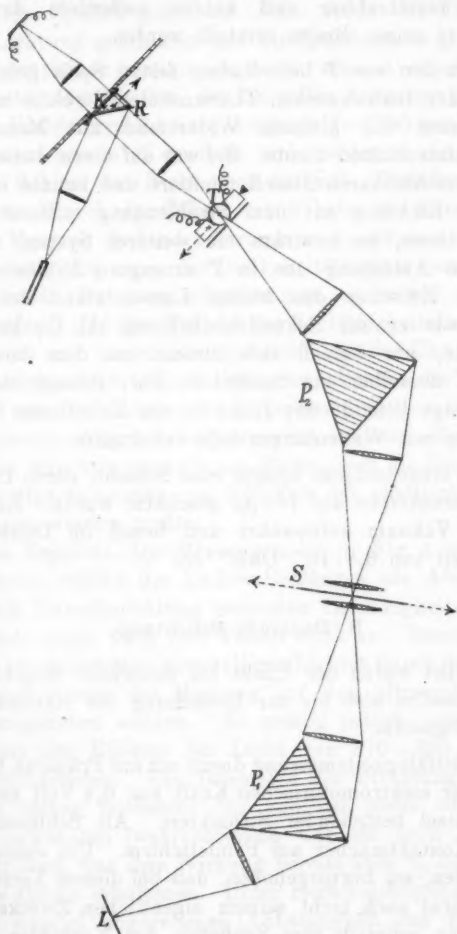


Fig. 3.

Als leuchtender Spalt diente wiederum der Nernststift. Der Brenner war geschwärzt, die Vorwärmer entfernt. Die

beiden symmetrischen Prismen waren gleichseitige Schwefelkohlenstoffprismen. Der Spalt S war in der angedeuteten Richtung verschiebbar und konnte außerdem durch eine Schraube in seiner Breite verstellt werden.

Durch den vor T befindlichen festen Spalt gelangte das Licht zu der Rubensschen Thermosäule T , welche mit einem Galvanometer von kleinem Widerstand zur Messung der Strahlungsintensitäten diente. Sie war auf einem zwischen zwei Lagern verschiebbaren Gestell montiert und konnte in der angegebenen Richtung aus dem Strahlengang entfernt werden. Geschah dieses, so bewirkte ein weiteres System von zwei Linsen die Abbildung des in T erzeugten Bildes auf dem Präparat. Zwischen den beiden Linsen stand der Pendelapparat, wie er zur Sekundenbelichtung (II. C.) bereits gedient hatte, nur befand sich diesmal an dem beweglichen Schirme K desselben ein Spiegel R , der, solange sich K im Strahlengange befand, das Licht in ein Zeissches Taschenspektroskop mit Wellenlängenskala reflektierte.

Das Versuchsobjekt bildete eine Schicht, deren Dicke aus der Interferenzfarbe auf $180\text{ }\mu\mu$ geschätzt wurde. Es war im trockenen Vakuum aufbewahrt und besaß im Dunkeln eine Leitfähigkeit von $3,8 \cdot 10^{-5}\text{ Ohm}^{-1}\text{ cm}^{-1}$.

B. Dauernde Belichtung.

Zunächst wurde der Effekt bei dauernder Belichtung bestimmt, dieselbe also bis zur Erreichung des stationären Zustandes fortgesetzt.

Zur Leitfähigkeitsmessung diente ein aus Präparat, Galvanometer, einer elektromotorischen Kraft von 0,4 Volt und einem Stromschlüssel bestehender Stromkreis. Als Schlüssel diente hier der Kontaktmacher am Pendelschirm. Um einen Irrtum zu vermeiden, sei hervorgehoben, daß bei diesem Versuche der Pendelapparat noch nicht seinem eigentlichen Zwecke diente, sondern hier lediglich zum Schließen des Kontaktes und als Gestell für den beweglichen Spiegel R gebraucht wurde.

Der Gang der Messung war folgender: Die Thermosäule T war aus dem Strahlengang gebracht; der Spiegel R warf das

Licht ins Spektroskop. Der feste Rand des Spaltes S wurde an eine bestimmte Stelle des Spektrums durch Verschieben des ganzen Spaltes gebracht. Nun wurde die Thermosäule in den Lichtweg geschoben und die Spaltbreite so gewählt, daß die Intensität einen bestimmten, ein für allemal vorgeschriebenen Wert hatte, nämlich den, der bei voller Ausnutzung des Apparates im Violett erreicht werden konnte ($= 1290 \text{ g-cal}/(\text{cm}^2 \text{ sec})$).

Hierauf wurde K geöffnet und, während ein vor S gebrachter Schirm das Licht noch aufhielt, T wieder zur Seite geschoben. Durch das Öffnen von K hatte der Kontaktmacher den zur Messung dienenden Stromkreis geschlossen. Hatte das Galvanometer die neue, der Dunkelleitfähigkeit des Präparates entsprechende Ruhelage eingenommen, so wurde der Schirm vor S entfernt und der Verlauf der Leitfähigkeitsänderung der Schicht bis zum neuen Gleichgewicht mit der Uhr verfolgt, so daß plötzliche, größere Intensitätsschwankungen der Lichtquelle während der Beobachtung an Unregelmäßigkeiten im Gang des Galvanometers hätten erkannt werden müssen. Eine derartige Kontrolle war hier deshalb am Platze, weil die für die Nernstlampe nötige Spannung von 220 Volt der städtischen Leitung entnommen werden mußte.

Das Ergebnis der Messungen ist in Fig. 4 niedergelegt. Die Kurve, welche die Lichtwellenlängen als Abszissen und die durch Dauerbelichtung erzeugten Leitfähigkeiten als Ordinaten hat, steigt nach dem Violett stark an. Besonders wegen der starken Absorption kurzwelligen Lichtes durch den Schwefelkohlenstoff konnte die Messung auf das ultraviolette Gebiet nicht ausgedehnt werden. Es gelang jedoch, einen unteren Grenzwert des Effektes bei Licht von $370\text{--}390 \mu\mu$ Wellenlänge festzustellen. Die Intensität der Strahlung in diesem Gebiete betrug höchstens $\frac{1}{12}$ von der sonst zu dem Versuche verwandten (wahrscheinlich war sie noch beträchtlich kleiner); doch war ihre Wirkung bereits über $\frac{1}{3}$ der im Violett von $\lambda = 425 \mu\mu$ erhaltenen. Unter Berücksichtigung der im folgenden Kapitel angegebenen Abhängigkeit des Effektes von der Intensität in verschiedenen Teilen des Spektrums konnte aus dieser Messung der in der Figur für $\lambda = 380 \mu\mu$ verzeichnete untere Grenzwert der Leitfähigkeitsänderung berechnet werden.

Es ist nicht ausgeschlossen, daß die Wirkung des langwelligeren Lichtes zum Teil einer Temperaturerhöhung entspringt. In diesem Falle würde die Kurve nach dem Rot noch schneller

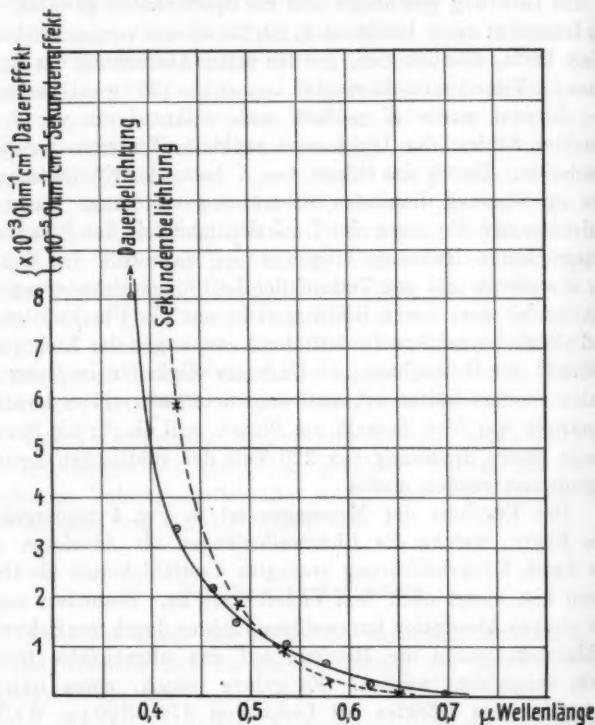


Fig. 4.

abfallen. Die Erklärung des gesamten Lichteffektes durch eine Wärmewirkung ist nach diesen Ergebnissen wohl ausgeschlossen.

C. Die Lichtabsorption des CuJ.

Der Versuch zeigt ferner, daß die Empfindlichkeitssteigerung nach kleineren Wellen einer wachsenden Absorption in derselben Richtung entspricht. Letztere ist für das sichtbare

Gebiet bis zu $420 \mu\mu$ herab von A. Mey¹⁾ gemessen worden. Der folgende Versuch zeigt, daß dieselbe auch für kleinere Wellen bis $380 \mu\mu$ — und gerade hier sehr stark — zunimmt.

Die Bestimmung geschah auf die Weise, daß die von einer Schicht von bekannter Dicke durchgelassene Intensität in irgend einem Spektralgebiet unter entsprechender Berücksichtigung der Reflexion mit der Intensität des auffallenden Lichtes verglichen wurde. Die Intensitäten wurden aus der Wirkung bestimmt, welche das Licht auf das Leitvermögen einer zweiten CuJ-Schicht ausübte. Solches war möglich durch die Kenntnis der Beziehung zwischen Intensität und Wirkung der Strahlung von verschiedener Wellenlänge (IV. A.).

Die Wirkung des Lichtes wurde wie im vorigen Versuche bestimmt, nur wurde das eine Mal eine mit CuJ überzogene Glasplatte, das andere Mal die letztere allein in den Strahlengang gebracht.

Von der Intensitätserniedrigung durch Reflexion wurde nur derjenigen Rechnung getragen, welche beim erstmaligen Auftreffen des Lichtes auf die Trennungsfläche Glas—Luft, bzw. CuJ—Luft stattfand. (Die Reflexion an der anderen Glaswand war in beiden Fällen dieselbe, die an der Trennungsfläche Glas—CuJ wurde vernachlässigt.) Die Berücksichtigung geschah durch die Beziehung

$$L_r = L_e \cdot \left(\frac{1-n}{1+n} \right)^2,$$

wo L_e bzw. L_r die Intensitäten des einfallenden bzw. reflektierten Lichtes bedeuten, und für n bei der einen Beobachtung das Brechungsverhältnis des Glases, bei der anderen das des CuJ einzusetzen ist.

Die Brechungsverhältnisse des CuJ wurden der angeführten Arbeit von Mey entnommen, bzw. aus diesen extrapoliert. Letzteres scheint bis $380 \mu\mu$ noch unbedenklich zu sein. Aus dem Verhältnis der in angegebener Weise korrigierten Intensitäten des durchgelassenen Lichtes und der Dicke d der durchstrahlten Schicht berechnet sich der Absorptionskoeffizient πk für die betreffende Wellenlänge λ aus der Formel:

$$\frac{L_o}{L_d} = e^{2\pi n k \frac{d}{\lambda}}.$$

1) A. Mey, l. c. p. 33.

Die Dicke d wurde aus der Interferenzfarbe auf $380 \mu\mu$ geschätzt.

Tabelle 1.

λ in $\mu\mu$	n (nach Mey)	nk	α $\text{Ohm}^{-1} \text{cm}^{-1}$
630	2,016	0,050	$0,31 \cdot 10^{-3}$
486	2,145	0,061	$1,64 \cdot 10^{-3}$
420	2,29	0,096	$3,56 \cdot 10^{-3}$
380	2,56	0,231	$> 8,06 \cdot 10^{-3}$

Die in der Tab. 1 angeführten Werte von nk sind noch etwas größer als die größten von Mey angegebenen, was durch Trübheit der Schicht zu erklären ist. Der Tabelle sind ferner die der Korrektur wegen Reflexion zugrunde gelegten Werte von n , sowie die in den betreffenden Teilen des Spektrums beim Versuche unter B. erzielten Leitfähigkeitserhöhungen α beigegeben.

D. Empfindlichkeitssteigerung durch Vorbelichtung ist nicht zu bemerken.

Von der empfindlichkeitserhöhenden Wirkung irgend einer Lichtart war zwar schon bei den Versuchen unter B. nichts wahrgenommen worden. Da aber nach jeder Beobachtung zum Ausdunkeln der Schicht eine Wartezeit von mindestens $\frac{1}{2}$ Stunde erforderlich war, so konnte eine solche Wirkung in dieser Zeit verschwunden sein. Nun zeigte sich, daß sich Leitfähigkeitsänderungen, durch kurze Belichtungen erzeugt, einige Male in gleicher Größe wiederholen ließen, auch wenn die Schicht den Dunkelwiderstand noch nicht wieder erreicht hatte. Nun verschwindet zwar nach Scholl die Wirkung der Vorbelichtung um so schneller, je kürzere Zeit dieselbe gedauert hatte. Ein Versuch, durch kurze Belichtungen wie unten die gesuchte Wirkung zu finden, bedurfte zu seinem Gelingen der folgenden Voraussetzungen:

1. Die Wirkung der Vorbelichtung muß einer Lichtart zukommen, deren Wellenlänge zwischen 400 und 700 $\mu\mu$ liegt.
2. Sie muß bei Belichtungen von 1 sec merklich sein.

3. Sie darf nicht erheblich schneller verschwinden als die Schicht ihrem Dunkelwiderstand zustrebt.

In diesem Falle hätten die Kurven, welche man durch rasch aufeinanderfolgende Sekundenbelichtungen erhielt, indem man das Spektrum in verschiedenem Sinne durchlief, voneinander abweichen müssen. Solche Sekundenbelichtungen wurden nun in der unter II. C. 2. beschriebenen Weise durch das Pendel vorgenommen.

Eine Vergrößerung eines Effektes durch Vorbelichtung war jedoch nicht zu beobachten.

Da die Resultate zugleich ein gewisses Maß für die Anfangsgeschwindigkeit der Leitfähigkeitsänderung bei verschiedenen Wellenlängen geben, so sind dieselben gleichfalls in Fig. 4 angegeben.

IV. Abhängigkeit des Effektes von der Intensität.

A. Dauernde Belichtung.

Die Abhängigkeit des Effektes von der Intensität bei Bestrahlung bis zum stationären Zustand wurde in verschiedenen Teilen des Spektrums bestimmt. Deshalb kam hier der Apparat Fig. 3 zur Verwendung. Die Intensität wurde variiert durch Drahtnetze, welche in den parallelen Strahlengang des ersten Spektralapparates gebracht und in der Weise geeicht wurden, daß man an die Stelle des Präparates eine Thermosäule brachte. Die verwandten Netze reduzierten die wirksame Intensität bzw. auf 0,60; 0,34; 0,192 von ihrem Betrage.

Die Kurven, welche die Beobachtungen in vier Teilen des Spektrums (zwei davon — bei $\lambda = 440$ und $\lambda = 530$ — sind sehr wenig voneinander verschieden) ergaben, wurden durch quadratische Gleichungen angenähert dargestellt. Um die Kurven besser vergleichen zu können, sind in Fig. 5 die Richtungen derselben im Anfangspunkte durch proportionale Änderung von x einander gleichgemacht. Man sieht, daß im Rot der Quotient aus Effekt und Intensität weniger schnell abnimmt als im Violett.

Ein mit weißem Licht vorgenommener Versuch, bei dem durch Verändern des Abstandes zwischen Lichtquelle und

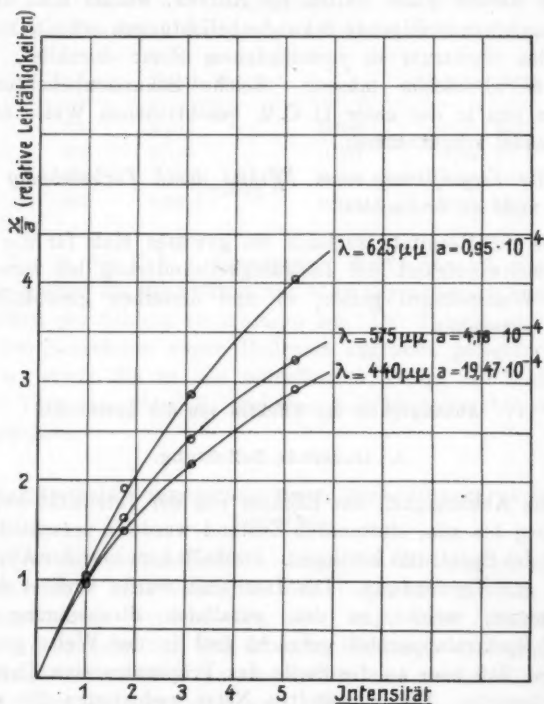


Fig. 5.

Schicht die Intensität in weiten Grenzen variiert wurde, lieferte eine ähnliche Kurve.

B. Kurze Belichtung.

Von größerer Bedeutung als diese Versuche, sind Messungen über die Abhängigkeit des Effektes von der Intensität in den ersten Augenblicken der Belichtung, ehe die Gegenwirkung, die zum schließlichen Gleichgewicht führte, einen merklichen Betrag erreicht.

Nach Bunsen und Roscoe und anderen ist die Größe eines photochemischen Effektes dem Produkt aus Intensität und Belichtungszeit proportional. Dieses Gesetz gilt naturgemäß nur, wenn der photochemische Effekt nicht durch eine vom Licht unabhängige Gegenreaktion teilweise aufgehoben wird, oder nur so lange, als diese Gegenreaktion als klein angesehen werden kann gegenüber der Lichtwirkung, also in dem ersten Moment der Belichtung.

Für eine Prüfung der vorliegenden Erscheinung in bezug auf dieses Gesetz kommen also kurze Belichtungszeiten in Betracht.

Dasselbe Gesetz würde, auf den vorliegenden Fall angewandt, besagen, daß die Menge des pro sec *gebildeten* freien Jods proportional ist der Lichtintensität, sowie bei konstanter Lichtintensität proportional der Zeit. Zu dieser Jodmenge X steht die Leitfähigkeit in der Beziehung

$$X = c_1 x^n + c_2 x.$$

Nun ist für die verwandten Präparate die Konzentration des im Dunkeln vorhandenen Jods außerordentlich klein; die durch die Belichtung hinzukommende Jodmenge ist für den Anfang der Belichtung beliebig klein. Also ist das erste Glied zu vernachlässigen, und es ist zu erwarten, daß *im Anfang der Belichtung auch x selbst proportional dem Produkt aus Zeit und Intensität ist.*

Für kurze Belichtungszeiten wurde aber der eine Teil des Gesetzes von Bunsen und Roscoe bereits an anderer Stelle (II. C. 1.) ausgesprochen. Es zeigte sich daselbst, daß für Belichtungszeiten bis zu $3 \times 0,034$ sec die *Leitfähigkeitsänderung proportional der Zeit* erfolgt.

Mit ganz der gleichen Anordnung wie in jenem Versuch, also dem Pendel mit beweglichem Spalt und Schleifkontakt, wurde auch die Abhängigkeit von der Intensität untersucht. Letztere wurde durch Drahtnetze, wie schon beschrieben, variiert, die auch hier in der Anordnung, wie sie Verwendung fanden, geeicht wurden.

Tabelle 2.

I

L	A	A/L
1	0,080	0,080
2,62	0,21	0,080
4,29	0,35	0,081

II.

L	A	A/L
1	0,19	0,190
2,62	0,49	0,187
4,29	0,80	0,186

III.

L	A	A/L
1	0,34	0,34
2,62	0,76	0,29
4,29	1,16	0,27

In den beigegeführten Tabellen finden sich die Ergebnisse der Messung vor. Dabei bedeuten L die Lichtintensitäten, A die Galvanometeraussschläge, welche der mittleren Leitfähigkeit während der Kontaktdauer entsprechen, und zwar:

in I., wenn die Belichtungszeit mit der Kontaktzeit zusammenfiel,

in II., wenn die Belichtung schon 0,034 sec,

in III., wenn sie schon 2.0,034 sec vor Beginn des Kontaktes eingeleitet war.

Es ist aus den Werten A/L zu ersehen, daß die Proportionalität zwischen Leitfähigkeit und Intensität um so genauer erfüllt ist, je kürzer die Belichtungsdauer gewählt wird, je reiner also der eigentliche Lichteffect vorliegt.

Das Gesetz

$$L \cdot t = \text{const.}$$

findet sich also für die eigentliche Lichtreaktion, soweit sie aus den Erscheinungen isoliert werden kann, bestätigt.

Dieses Ergebnis besagt, daß die Wandlungskonstante der eigentlichen Lichtreaktion *proportional* der Lichtstärke ist.

V. Abhängigkeit des Effektes von der Jodkonzentration.

Im Sinne der bisherigen Ergebnisse und Überlegungen ist ein besonders starker Einfluß auf den Verlauf der Erscheinungen durch das Hinzubringen freien Jods von außen zu erwarten. Jod wird ja von CuJ in nicht unbeträchtlicher Menge aufgenommen unter einer bisweilen erheblichen Steigerung der Leitfähigkeit.

Theoretisch vorauszusehen ist hierbei folgendes:

1. Auf die Geschwindigkeit der reinen Lichtreaktion, d. h. der Abspaltung freien Jods, hat die ursprüngliche Jodkonzentration keinen Einfluß.

2. Die Rückbildung wird entsprechend dem Massenwirkungsgesetze dadurch beeinflußt, daß durch Jodzusatz die aktive Masse dieser Reaktion vergrößert wird.

Die Art, wie diese beiden Vorgänge in der Leitfähigkeit zum Ausdruck kommen, muß wiederum aus der allgemeinen Beziehung zwischen Jodgehalt und Leitfähigkeit hervorgehen.

A. Der stationäre Belichtungszustand.

Erfolgt die Dunkelreaktion um so schneller, je größer die Konzentration des im Licht gebildeten freien Jods ist, so muß auch durch Zubringen freien Jods von außen der Vorgang geändert werden können. Insbesondere muß die Dunkelreaktion um so lebhafter vor sich gehen, je mehr freies Jod das Präparat bereits vor Belichtung enthielt. Die Folge davon ist, daß der stationäre Zustand früher eintritt, d. h. *der Effekt muß um so kleiner sein, je größer die Dunkelleitfähigkeit (Jodkonzentration) ist.*

Um die Vorgänge nach dieser Richtung studieren zu können, wurde ein breites Präparat von möglichst gleichmäßiger Dicke in eine Anzahl schmaler Streifen zerlegt, von denen jeder eine Schicht von 0,07 cm durchströmter Länge und durchschnittlich 0,4 cm Breite enthielt. Die Dicke schwankte nach einer Schätzung aus der Interferenzfarbe zwischen 80 und 130 μ . Die Präparate wurden mit verschiedenem Jodgehalt in angegebener Weise durch Aufbringen von Glimmerplättchen fixiert.

Die Belichtung geschah durch eine mit 1 Amp. und 110 Volt konstant brennende Nernstlampe, deren Glühfaden durch eine Linse vergrößert auf dem Präparat abgebildet wurde. Das Licht traf das Präparat durch die Glasunterlage hindurch, nachdem es einen mit Wasser gefüllten Glastrog durchsetzt hatte. Die Widerstände wurden in der Brücke gemessen, die Einstellung durch Wechselstrom und Telephon bewirkt. Der Verlauf der Widerstandsänderung im Licht wurde mit der Uhr verfolgt.

Tabelle 3.

Nr.	x_0	x_∞	$\frac{x_\infty - x_0}{x_\infty}$
	Ohm ⁻¹ cm ⁻¹		
I	2,6129	2,7257	0,0414
II	1,9800	2,2317	0,1127
III	1,5119	1,9656	0,231
IV	0,3821	0,6973	0,452
V	0,3287	0,6597	0,502
VI	0,1362	0,6447	0,788

Die Tabelle enthält die Dunkelleitfähigkeiten (x_0), die Helleitfähigkeiten (x_∞) im stationären Belichtungszustand, sowie die relativen Leitfähigkeitszunahmen der Präparate I bis VI. Da nun

$$\frac{x_\infty - x_0}{x_\infty} = \frac{w_0 - w_\infty}{w_0},$$

wo w die entsprechenden Widerstände bedeutet, so ist in der Tabelle das Ergebnis enthalten, daß im Gegensatz zu den Schollischen Resultaten an AgJ *die relative Widerstandsänderung von CuJ um so größer ist, je geringer der ursprüngliche Jodgehalt des Präparates ist.*

Im Sinne der beim CuJ gemachten Annahmen reicht dieses Resultat nicht aus. Bezeichnet man nämlich die Konzentration des im Dunkeln vorhandenen Jods mit x_0 , die nach unendlich langer Belichtung vorhandene mit x_∞ , so ist bekanntlich

$$x_0 = c_1 x_0^n + c_2 x_0,$$

$$x_\infty = c_1 x_\infty^n + c_2 x_\infty.$$

Wächst nun die Größe

$$\frac{x_{\infty} - x_0}{x_{\infty}}$$

mit abnehmendem x_0 , so tut dies erst recht die Größe

$$\frac{x_{\infty} - x_0}{x_{\infty}}.$$

Das obige Resultat besagt also nur, daß die relative Konzentration des durch Dauerbelichtung frei gewordenen Jods mit abnehmender Dunkelkonzentration wächst.

Die dem Versuche vorausgeschickten Erwägungen verlangen aber auch eine absolute Zunahme des frei werdenden Jods in diesem Falle, also auch eine Zunahme der Größe

$$(x_{\infty}^n - x_0^n) + \frac{c_2}{c_1}(x_{\infty} - x_0)$$

mit abnehmender Dunkelkonzentration.

Eine entsprechende Prüfung der in der Tabelle angegebenen Werte zeigt jedoch überhaupt keine monotone Abhängigkeit dieser Größe von x_0 (oder von $x_0^n + (c_2/c_1)x_0$) für irgend einen Wert von c_2/c_1 . Eine Erklärung dieses Ergebnisses steht noch aus.

B. Die Anfangsgeschwindigkeit der Leitfähigkeitsänderung.

Am einfachsten zu behandeln in bezug auf die Abhängigkeit vom Jodgehalt im Dunkeln ist der Anstieg der Leitfähigkeitsänderung bei Beginn der Belichtung, welcher kurzweg als Anfangsgeschwindigkeit bezeichnet werden möge.

Für den zeitlichen Verlauf der Jodabspaltung im Licht gilt nach II. D. und IV. B. die Gleichung

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = C \cdot L - F(x).$$

$F(x)$ als Symbol für die Dunkelreaktion besteht aus dem mit einer Konstanten multiplizierten Produkt der aktiven Massen dieser Reaktion. Da sich unter diesen Faktoren die Konzentration eines bei dem Belichtungsprozeß erst auftretenden

jodärmeren Stoffes oder eine endliche Potenz desselben befindet, so ist für

$$(2) \quad \begin{cases} t = 0 \\ F(x) = 0, \end{cases}$$

ein Ergebnis, das schon früher Verwendung gefunden hat.

Als Beziehung zwischen Leitfähigkeit und Jodkonzentration gilt

$$(3) \quad x + x_0 = c_1 x^n + c_2 x.$$

Hierbei bedeutet ebenfalls x die zur Dunkelkonzentration x_0 durch Belichtung hinzugekommene Jodmenge.

Aus (1) und (3) gewinnt man:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{c_1 n x^{n-1} + c_2} [C \cdot L - F(x)].$$

Diese Gleichung führt unter Berücksichtigung von (2) zu folgendem Resultat für die Anfangsgeschwindigkeit

$$v_0 = \left(\frac{dx}{dt} \right)_{t=0} = \frac{C \cdot L}{c_1 n x_0^{n-1} + c_2}.$$

Bezieht man diese Gleichung auf Beobachtungen mit konstanter Lichtintensität, so ist v_0 allein eine Funktion des Dunkelleitvermögens x_0 , der man die folgende Form geben kann:

$$\frac{1}{v_0} = a x_0^{n-1} + b.$$

Die Berechnung von a , b und n aus drei gegebenen Beobachtungen läßt sich am einfachsten auf folgende Weise werkstelligen:

Zunächst läßt sich sofort b mit Hilfe der beiden Wertepaare

$$x_0'; v_0' \quad \text{und} \quad x_0^*; v_0^*$$

eliminieren, und es ergibt sich:

$$\frac{1}{v_0'} - \frac{1}{v_0^*} = a(x_0'^{n-1} - x_0^{*n-1}).$$

Es ist zu erwarten, daß sich für n ein Wert zwischen 5 und 6 ergibt. Wählt man nun eine der Beobachtungen, beispielsweise x_0^* ; v_0^* so, daß die vierte Potenz von x_0^* gegenüber der

vierten Potenz von κ_0' zu vernachlässigen ist, so gewinnt die letzte Gleichung die Form

$$\frac{1}{v_0'} - \frac{1}{v_0^*} = a \kappa_0'^{n-1},$$

vorausgesetzt, daß sich wirklich n so groß ergibt, daß die Vernachlässigung statthaft ist.

In derselben Weise läßt sich eine weitere Gleichung

$$\frac{1}{v_0''} - \frac{1}{v_0^*} = a \kappa_0''^{n-1}$$

aus einem dritten Wertepaare

$$\kappa_0''; v_0''$$

ableiten, wenn κ_0^{*n-1} auch gegenüber $\kappa_0''^{n-1}$ vernachlässigt werden darf.

Die Größen v_0 konnten vorläufig nur aus den Kurven, welche bei den Versuchen I bis VI der Tab. 3 aufgenommen worden waren, graphisch ermittelt werden. Da dieses Verfahren keinen Anspruch auf große Genauigkeit haben kann, so darf auch vorläufig nicht mehr behauptet werden, als daß die Beobachtungen mit den theoretischen Ergebnissen durchaus nicht in Widerspruch stehen.

Zunächst wurde a , b und n berechnet aus den am besten verwendbaren Beobachtungen I, III, VI, also den Wertepaaren:

	κ_0 Ohm ⁻¹ cm ⁻¹	$\frac{1}{v_0}$ [v_0] = Ohm ⁻¹ cm ⁻¹ sec ⁻¹
I	2,613	4000
III	1,512	650
VI	0,136	320

Dabei genügt VI der Bedingung von κ^* .

Die Rechnung ergab die Werte:

$$n = 5,4081,$$

$$a = 53,4,$$

$$b = 320.$$

Die Beobachtungen II, IV, V lassen sich durch diese Werte von a , b und n darstellen.

Aus den theoretischen Betrachtungen und den gefundenen Werten der Konstanten a , b , n ergibt sich die Forderung, daß

bei kleinen Leitfähigkeiten eine Verkleinerung der Dunkel-leitfähigkeit auf v_0 keinen merklichen Einfluß haben darf. Es schien mir dies jedoch in weiten Grenzen (auf die Präparate im Vakuum) nicht anwendbar; doch sind hier weitere Versuche nötig.

C. Die Dunkelreaktion.

Ist die Gegenreaktion eine gewöhnliche chemische Reaktion, verdient sie also den Namen „Dunkelreaktion“, so wird sie nur von der Konzentration der Stoffe abhängen, in deren Umwandlung die Reaktion besteht.

Dieser Schluß führte zu folgendem Versuche: Wurde eine Kupferjodürschicht belichtet, so mußte einer bestimmten Leitfähigkeitsänderung nach den gewonnenen Vorstellungen eine bestimmte Konzentration des Jods, also auch der jodärmeren im Licht gebildeten Produkte entsprechen, gleichviel durch welche Kombination von Intensität und Belichtungszeit man zu dieser Leitfähigkeit gekommen war. Deshalb mußte die Leitfähigkeitsabnahme nach Verdunkeln bei Anwendung verschiedener Lichtintensitäten immer den gleichen Verlauf zeigen, wenn nur die Belichtung stets in dem Augenblicke geschlossen wurde, wo in jedem Falle die gleiche Leitfähigkeitsänderung erzeugt worden war.

Die Versuche ergaben jedoch, daß zwei nach vorangegangener Belichtung mit verschiedener Intensität auf diese Weise gewonnene Kurven stets etwas voneinander abwichen; und zwar erschien die Kurve, welche nach der größeren Belichtungszeit (also der kleineren Intensität) beobachtet wurde, gegenüber der anderen etwas verzögert. Da sich das Gleiche auch an fixierten Präparaten zeigte, so mag Austritt von Jod aus der Schicht hierbei keine Rolle spielen.

Allerdings ist hierbei die anscheinend plausible Annahme gemacht, daß die Leitfähigkeitserhöhung *momentan* aus der Konzentrationszunahme des Jods folgt.

Es genügt mir, in diesem Kapitel die Bedeutung hervor-gehoben zu haben, welche die Untersuchung der Abhängigkeit

der Empfindlichkeit vom Dunkelwiderstand für die Bestätigung der Theorie, sowie für ihre quantitative Durchführung hat. Weitere Versuche nach dieser Richtung erscheinen mir um so lohnender, als ein prinzipielles Hindernis nicht besteht, die Versuchsanordnung besonders für die Messung der Anfangsgeschwindigkeit zu weit genaueren Beobachtungen geeignet zu machen.

VI. Abhängigkeit des Effektes von der Temperatur.

Eine Abhängigkeit des Effektes von der Temperatur ist schon insofern zu erwarten, als die Leitfähigkeit einen Temperaturkoeffizienten besitzt. Zugleich wird aber auch die Jodabspaltung im Licht von der Temperatur beeinflusst werden. Zwar wird die Lichtreaktion, wie bisher an photochemischen Reaktionen beobachtet wurde, keinen beträchtlichen Temperaturkoeffizienten besitzen. Dagegen wird die Dunkelreaktion als gewöhnliche chemische Reaktion in ihrer Geschwindigkeit mit wachsender Temperatur stark zunehmen.

Aus diesem Grunde muß bei höherer Temperatur der stationäre Zustand, sowie nach Verdunkeln der ursprüngliche Zustand schneller erreicht werden, die Konzentration des frei werdenden Jods im stationären Belichtungszustand kleiner sein.

Da die Versuche an einem Präparat mit hohem Dunkelwiderstand vorgenommen wurden, das also mit steigender Temperatur seine Leitfähigkeit steigerte¹⁾, so ist ein gleicher Temperaturkoeffizient auch an der durch Belichtung erzeugten Leitfähigkeit zu erwarten. Nun ist die Ursache eines positiven Temperaturkoeffizienten der Leitfähigkeit an metallischen Leitern in der mit der Temperatur zunehmenden Abdissoziation von Elektronen zu suchen, eine Annahme, welche von J. Koenigsberger²⁾ eine durch mehrere Experimente gut bestätigte Darstellung gefunden hat. Nimmt aber hiernach die Konzentration des undissoziierten Jods mit zunehmender Temperatur ab, so muß auch die Geschwindigkeit der Dunkelreaktion abnehmen;

1) Vgl. K. Bädeker, Ann. d. Phys. 29. p. 578. 1909.

2) J. Koenigsberger, Jahrb. d. Rad. u. El. 4. p. 165. 1907.

dieses Ergebnis wäre bei einer quantitativen Bestimmung des Temperaturkoeffizienten der Dunkelreaktion zu berücksichtigen.

Folgende *Versuchsanordnung* ließ sich zur Auffindung der Temperaturkoeffizienten verwenden: Um dem Präparate verschiedene Temperaturen erteilen zu können, befand sich dasselbe in horizontaler Lage dicht über dem Boden eines ca. 25 cm langen Reagensrohres. Das letztere war in vertikaler Richtung fest montiert und zwar so, daß sich über dasselbe ein Dewarsches Gefäß, mit dem betreffenden Bade versehen, schieben ließ, ohne daß das Gefäß mit dem Präparat aus seiner Lage gebracht wurde. Das Reagenrohr wurde mit einem Glasstöpsel luftdicht verschlossen, der außer den eisernen Zuleitungsdrähten eine planparallele Platte trug. Durch diese traf das Licht von oben auf die Schicht. Das Gefäß enthielt ferner eine Schale mit Natriummetall und war evakuiert. Mit Rücksicht auf den unten folgenden Versuch, der die Anfangsgeschwindigkeiten betrifft, wurde zur Belichtung die gleiche Anordnung wie in II. C. 1. verwendet (Pendel mit beweglichem Spalt). Ein unter 45° über dem Gefäß aufgestellter Spiegel reflektierte das Licht, nachdem es die zweite Linse passiert hatte, in vertikaler Richtung auf die Schicht.

Die Beobachtungen geschahen bei Zimmertemperatur ($+19^\circ \text{C.}$), bei 0° , bei der Temperatur einer Kältemischung von Schnee und Salz (-21°) und bei der einer Kohlensäure-Äthermischung (-77°).

Dem *Einfluß der Temperatur auf den zeitlichen Verlauf der Leitfähigkeitsänderung bei dauernder Belichtung*, also dauernd geöffnetem Pendelspalt, galt der erste Versuch. Er wurde angestellt bei den drei in Fig. 6 angegebenen Temperaturen. Die Fig. 6 enthält den interessantesten Teil der gewonnenen Kurven, welche zu Ordinaten die den durch Belichten erzeugten Leitfähigkeiten entsprechenden Galvanometerausschläge haben. Zunächst steigen die Kurven niederer Temperatur weniger steil an, weil die gleiche Menge erzeugten Jods hier eine geringere Leitfähigkeitsänderung hervorbringt, erreichen aber schließlich doch höhere Ordinatenwerte, da die Geschwindigkeit der Dunkelreaktion bei niederer Temperatur bedeutend kleiner ist.

Fig. 7 zeigt bei vier Temperaturen die Anfangsgeschwindigkeiten der Leitfähigkeitsänderung, wie sie bei genau der gleichen Verwendung des Pendelapparats wie in II. C. 1. gefunden wurde. Man erkennt hieraus die erwartete Abhängigkeit der Helleitfähigkeit von der Temperatur.

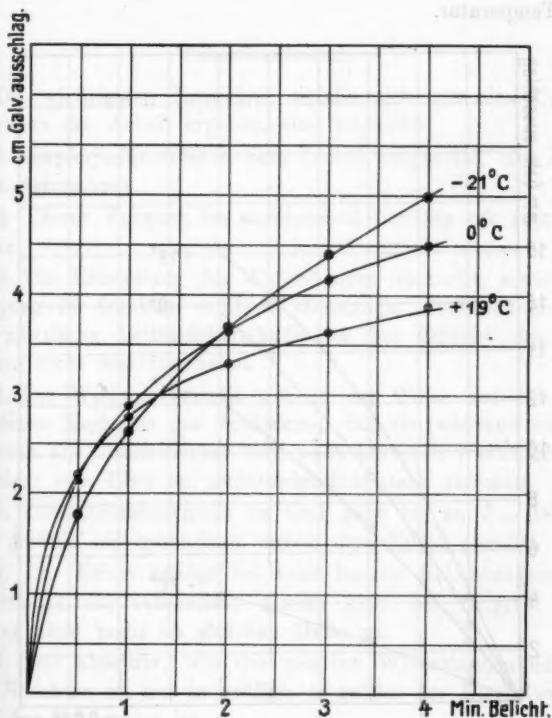


Fig. 6.

Besitzt die Lichtreaktion keinen erheblichen Temperaturkoeffizienten, so muß die Anfangsgeschwindigkeit der Jodabsplattung von der Temperatur unabhängig sein. Bedenkt man weiterhin, daß bei den geringen Dunkelleitfähigkeiten diese wahrscheinlich angenähert proportional den gesamten Jodkonzentrationen sind, so müßten die zwei bestimmten

Temperaturen zukommenden Dunkelleitfähigkeiten in demselben Verhältnis stehen, wie die bei den gleichen Temperaturen durch eine konstante kurze Belichtung erzeugten Leitfähigkeitsänderungen. Die Beobachtungen zeigen jedoch sonderbarer Weise eine schnellere Zunahme des Dunkelleitvermögens mit der Temperatur.

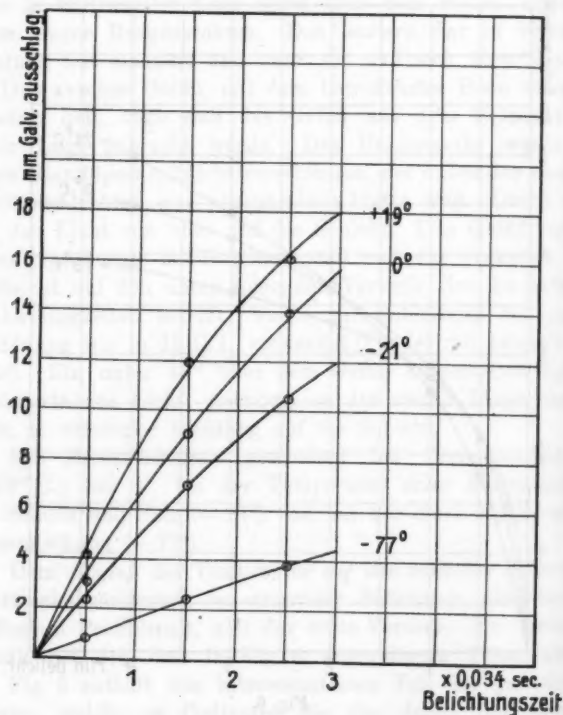


Fig. 7.

Bewirkt man durch entsprechende Änderung der Lichtintensität, daß die Leitfähigkeitskurven bei allen Temperaturen dieselben Anfangsgeschwindigkeiten haben, so erreicht die bei -21°C. gewonnene Kurve weit über den doppelten Ordinatenwert als die der Temperatur $+19^{\circ}\text{C.}$ zukommende. Auch

zeigt sich im letzteren Falle eine erheblich größere Rückbildungsgeschwindigkeit nach dem Verdunkeln.

Eine Bestimmung des Temperaturkoeffizienten der Dunkelrückbildung direkt aus diesen Beobachtungen ist wahrscheinlich nicht angängig.

Zusammenfassung.

Die wichtigsten *Tatsachen*, welche sich aus den Untersuchungen der Arbeit ergeben, sind folgende:

1. Kupferjodür erfährt, dem Lichte ausgesetzt, eine Leitfähigkeitszunahme.

2. Dieser Vorgang ist anscheinend beliebig oft reproduzierbar.

3. Die Einstellung des Widerstandes im Licht, sowie der Rückgang im Dunkeln erfolgen allmählich. Insbesondere ist eine plötzliche Leitfähigkeitsänderung bei Eintritt der Belichtung nicht wahrzunehmen.

4. Die Wirkung verteilt sich in der Weise auf die verschiedenen Regionen des Spektrums, daß sie (während sie im Rot noch eben nachweisbar war) nach kürzeren Wellenlängen, besonders vom Blau an, außerordentlich stark zunimmt.

5. Die Lichtabsorption im CuJ geht bis zu $\lambda = 380 \mu$ herab (soweit, als beobachtet wurde) dem Effekt parallel.

6. Der Effekt erfolgt bei sehr kurzen Belichtungszeiten proportional der Intensität, nimmt aber bei längerer Belichtung nicht mehr im gleichen Maße zu.

7. Die absolute, wie die relative Widerstandsabnahme beim Belichten ist um so größer, je größer der Dunkelwiderstand des Präparates ist.

8. An jodarmen Präparaten zeigt sich folgende Abhängigkeit des Effektes von der Temperatur: Die Wirkung, welche durch konstante kurze Belichtungen erzielt wird, nimmt mit wachsender Temperatur zu. Dagegen sind die durch dauernde Belichtungen gewonnenen Leitfähigkeitsänderungen um so größer, je tiefer die Temperatur ist.

Wenn auch die *theoretische Deutung*, zu welcher ein Teil der in der Arbeit dargelegten Untersuchungen drängte, deren

Verfolgung ein anderer seine Inangriffnahme verdankt, in ihren Grundlagen noch nicht als erwiesen angesehen werden kann, so ermöglicht sie doch, die Erscheinungen unter dem folgenden Bilde zu vereinigen:

Das Licht bewirkt am CuJ einen elektrisch neutralen Dissoziationsprozeß, bei welchem freies Jod gebildet wird. Dieser Vorgang läßt sich den Gesetzen, welche für photochemische Reaktionen gelten, unterwerfen, erfolgt also insbesondere proportional der Belichtungsdauer und proportional der Lichtstärke.

Das Auftreten der im Licht gebildeten Dissoziationsprodukte des CuJ ruft eine weitere Reaktion hervor, welche dieselben wiederum zu CuJ vereinigt und so nach längerer Belichtung zu einem stationären Zustand in bezug auf die im Lichte auftretenden und wieder zurückverwandelten Stoffe führt. Die Gegenreaktion hat den Temperaturkoeffizienten gewöhnlicher chemischer Reaktionen und wird vom Lichte nicht beeinflusst.

Das im Licht gebildete freie Jod zeigt, wie das dem CuJ von außen zugebrachte, das von K. Bädcker gefundene Phänomen; indem es sich im CuJ löst, wird es zum Teil dissoziiert und erteilt dem CuJ metallisches Leitvermögen, bzw. erhöht das infolge von Anwesenheit freien Jods auch im Dunkeln vorhandene. Durch diese teilweise Dissoziation wird die Geschwindigkeit der Gegenreaktion verkleinert, ein Umstand, welcher eine vollständige theoretische Darstellung zu mindest außerordentlich erschweren muß.

Jena, Physikalisches Institut, Juli 1909.

(Eingegangen 23. November 1909.)

6. Über die Bestimmung spezifischer Wärmen; von A. Magnus.

(Aus dem Phys.-chem. Institut der Universität Berlin.)

Da in letzter Zeit die theoretische Forschung die genaue Bestimmung spezifischer Wärmen in weiten Temperaturgrenzen wünschenswert erscheinen ließ, versuchte ich, einer Anregung von Hrn. Professor Nernst folgend, die spezifischen Wärmen einiger fester Stoffe zu bestimmen. Die Methode, sowie die bisher erhaltenen Resultate erlaube ich mir im folgenden zu beschreiben.

Die Messung der spezifischen Wärmen wurde nach dem Mischungsverfahren vorgenommen. Als Kalorimeter diente eine Vergrößerung des von v. Steinwehr¹⁾ und Rümelin²⁾ ausgearbeiteten Apparates. Das Prinzip der Methode ist folgendes: Zwei ganz gleiche Gefäße, die mit gleich viel Wasser gefüllt sind, stehen dicht nebeneinander, durch eine Korkplatte getrennt, in einem gut gegen Wärmeleitung isolierenden Kasten. Gemessen wird die Temperaturdifferenz zwischen beiden Gefäßen, die im allgemeinen sehr klein bleiben wird, wenn einmal Temperaturgleichgewicht erreicht ist. Denn von außen werden beide Gefäße durch Wärmeleitung nur sehr wenig beeinflusst, und auch stets nur in demselben Sinne. Der Wärmeaustausch zwischen den beiden Gefäßen wird dagegen von bedeutend höherer Größenordnung sein, so daß die Temperaturdifferenz im allgemeinen dem Werte Null zustreben wird, wenn ein Gefäß etwas erwärmt worden ist. Gemessen wird diese Temperaturdifferenz durch eine Thermosäule, die rittlings auf beiden Gefäßen sitzt derart, daß sich die Lötstellen etwa in halber Höhe der Gefäßwände befinden. Als Spannungsmesser dient ein empfindliches Galvanometer. Wird nun dem einen Gefäß eine Wärmemenge zugefügt, so steigt seine Temperatur

1) H. v. Steinwehr, Dissertation Göttingen 1900.

2) G. Rümelin, Dissertation Göttingen 1905.

und das Galvanometer zeigt eine größere Temperaturdifferenz an. Durch Wärmeaustausch mit dem anderen Gefäß wird diese Differenz langsam zurückgehen und das Galvanometer wird einen Temperaturgang anzeigen, der beobachtet werden kann. Dieser Gang, der bekanntlich rückwärts extrapoliert werden muß, wird dann zu den kleinsten Fehlern Veranlassung geben, wenn die aus ihm berechnete Korrektur ein möglichst kleiner Bruchteil der ganzen Temperaturänderung ist. Das läßt sich am besten durch eine möglichst große Kapazität des Kalorimeters erreichen, da der Wärmeaustausch zwar mit der Oberfläche wächst, der durch den Wärmeaustausch bedingte Temperaturgang aber mit der dem Volumen proportionalen Kapazität abnimmt. Aus diesem Grunde sah ich mich veranlaßt, die Kapazität des Kalorimeters im Vergleich zu der des Rümelinschen Apparates sehr wesentlich zu steigern. Während nämlich Rümelin seine Gefäße mit etwa je einem halben Liter Wasser füllte, verwandte ich große, etwa 60 Liter fassende Töpfe. Dieser bedeutenden Größenänderung mußte natürlich auch bei der übrigen Konstruktion des Apparates Rechnung getragen werden. Ich sehe mich daher veranlaßt, hier etwas näher darauf einzugehen.

Die Abbildung (Fig. 1) stellt das Kalorimeter ungefüllt, im übrigen aber betriebsfertig dar. Man sieht eine große Holzkiste, in der sich die beiden Glasgefäße befinden, die später durch Zinktöpfe von den gleichen Dimensionen — 50 cm Höhe und 30×40 cm Grundfläche — ersetzt wurden. Die Rührung besorgten zwei Zinkbleche, die vermittelt eines auf dem Deckel der Kiste angebrachten Rührwerks von einem Heißluftmotor in auf- und niedergehende Bewegung gesetzt wurden. Um die Wärmeleitung durch die Rührer möglichst klein zu machen, waren die Zinkbleche an je zwei Glasstäben befestigt, die oberhalb des Kistendeckels mit je einer horizontalen Holzlatte verbunden waren. Da die Glasstäbe nicht seitlich beansprucht werden durften, war als Führung in der Mitte jeder Holzlatte eine in einem Messingrohr gleitende Messingstange angebracht, die aber nicht in das Wasser des Kalorimeters eintauchte. Der ganze Apparat war so eingerichtet, daß jeder einzelne Teil leicht abgenommen werden konnte und daß vor allem die Glasstangen, die häufig zer-

brachen, leicht repariert werden konnten. Die Wärmeisolation nach außen wurde durch Wattepolster sowie durch innen und außen aufgenagelte dicke Korksteinplatten erzielt.

Die Thermosäule bestand aus 100 Elementen Konstantan-Kupfer. Die mit Zinn gelöteten Berührungsstellen befanden sich in engen, 25 cm langen Glasröhren, die in einen Hart-



Fig. 1.

gummiendeckel in vier Reihen zu je 50 Stück eingekittet waren. Der Widerstand der Säule betrug, da 1 mm starker Konstantandraht verwandt war, nur $41,43 \Omega$. Der Strom der Thermosäule wurde durch Klingeldraht zu einem Stromwender geleitet, der zur Vermeidung unliebsamer Thermoströme beim Kommutieren folgendermaßen konstruiert war: In einem Akkumulatorenglase, das 1 Liter Paraffinöl enthielt, befanden sich

quadratisch angeordnet vier zylindrische Gläschen, in die etwas Quecksilber eingefüllt war. In zwei diagonal gegenüberstehende Gefäße tauchten die Enden der Leitung von der Thermosäule, in die beiden anderen die Galvanometerleitungen. Durch Ansaugen des Quecksilbers in ein in der Skizze (Fig. 2) veranschaulichtes Röhrensystem konnten je zwei benachbarte Gefäße leitend verbunden werden. Das Wenden des Stromes geschah durch Ansaugen des Quecksilbers nach einer Drehung des Röhrensystems um 90° .

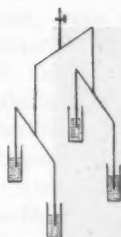


Fig. 2.

Das verwandte Spiegelgalvanometer war ein Drehspulensinstrument von Siemens & Halske. Es stand auf dem Tische einer Juliusschen Aufhängung und war von einem mit Stanniol beklebten Pappkasten umgeben. Bei 280 cm Skalenabstand hatte es eine Empfindlichkeit von etwa 10^{-8} Amp. für 1 mm Ausschlag. Sein Widerstand betrug $28,7 \Omega$. Beobachtet wurde mit einem Fernrohr an einer mit der Teilmaschine geteilten 1 m langen Milchglasskala.

Zur Erwärmung der Substanz, deren spezifische Wärme gemessen werden sollte, wurden für verschiedene Temperaturgebiete drei Apparate benutzt. Um 100° zu erzielen, wurde der Metallblock oder ein Gefäß aus Kupferblech, das mit der Substanz gefüllt war, in einem Kupferrohr von 32 mm Weite, das vom Dampfe siedenden Wassers umspült war, über eine Stunde erhitzt. Es zeigte sich, daß in dieser Zeit die Substanz stets die aus dem Barometerstand berechnete Siedetemperatur des Wassers angenommen hatte. Beim Einwurf wurde der untere Verschluskork aus dem Kupferrohr gezogen, der Apparat in ein im Deckel des Kalorimeters befindliches Loch von 4 cm Weite eingesetzt und die Substanz an einem Faden, der durch ein enges Loch des oberen Verschluskorkes lief in das Wasser eingelassen. Die Einwurfszeit betrug etwa $\frac{1}{5}$ Sek.

Für Temperaturen zwischen 200° und 360° wurde ein elektrischer Kupferrohrföfen benutzt, der oben und unten mit Asbest verschlossen war. Die Temperatur wurde mit einem von der Reichsanstalt geprüften, in halbe Grade geteilten Quecksilberthermometer bestimmt, das mindestens 5 cm tief

in der Substanz steckte. Pulverförmige Substanzen befanden sich dabei in einem 30 mm weiten hartgelöteten zylindrischen Gefäß aus Kupferblech, an dessen oberen Deckel ein in die Mitte führendes Rohr für das Thermometer angebracht war. Die Substanzen hingen an einem Kupferdraht, an dem außerhalb des Ofens ein Garnfaden befestigt war. Der Einwurf wurde in der oben beschriebenen Weise vorgenommen.

Für höhere Temperaturen endlich mußte die Apparatur etwas geändert werden. Die Metallblöcke, deren spezifische Wärme bestimmt wurde, waren hier wesentlich kleiner; sie befanden sich in der Mitte eines elektrisch geheizten horizontalen Ofens von 20 mm Rohrdurchmesser in einem hinten verschlossenen Silberrohr (Fig. 3). Die

Temperatur wurde gemessen mit einem an die Rückwand angelegten Thermoelemente Platin-Platin-Rhodium, das mit dem Schwefelsiedepunkte und dem



Fig. 3.

Antimonschmelzpunkte geeicht war. Der Einwurf erfolgte durch plötzliche Drehung des Ofens in vertikale Stellung nach Abnahme eines Asbestpfropfens. Da sowohl beim freien Fall der glühenden Metallstücke durch die Luft als auch beim Eintauchen in das Wasser durch Verdampfung des letzteren nicht unbeträchtliche Wärmeverluste entstehen können, wurde folgende Vorsichtsmaßregel angewandt. Unter dem Einwurfsloch wurde am Deckel des Kalorimeters eine Tüte aus Kupferblech zwischen drei leichten Stahlfedern aufgehängt. Die fallende Substanz riß die Tüte mit sich fort, wurde von ihr gegen die vorbeistreichende Luft geschützt und kam erst mit dem Wasser in Berührung, wenn die etwa fünfmal so lange Kupfertüte vollständig eingetaucht war. Der nun entwickelte Wasserdampf wurde von der darüber befindlichen Wassersäule wieder kondensiert, so daß die Verluste auf ein Minimum beschränkt wurden. Die Zahlen, die bei Verwendung der Kupfertüte erhalten wurden, sind etwa 1,5 Proz. höher als die ohne diese Vorsichtsmaßregel gefundenen Werte.

Vor Beginn der eigentlichen Messungen wurde die Temperaturempfindlichkeit der Thermosäule bestimmt. Zu diesem Zwecke wurde das eine Kalorimetergefäß um mehrere Grade erwärmt und seine Temperatur an einem von der Reichs-

anstalt geprüften Beckmannthermometer abgelesen. Im anderen Gefäß, dessen Temperatur ziemlich konstant blieb, befand sich ein zweites Beckmannthermometer, das vorher mit dem geprüften verglichen war. Die Spannung wurde mit dem Spiegelgalvanometer gemessen, dem ein größerer Widerstand vorgeschaltet werden mußte, damit die Ausschläge auf der Skala blieben. Die erhaltenen Resultate zeigt folgende Tabelle.

Temperaturdifferenz	Ausschlag in mm			Galvanometerempfindlichkeit	Gesamtwiderstand	Milli-Volt pro Grad
	links	rechts	Mittel			
3,505 °	156,0	158,8	157,4	$8,925 \cdot 10^{-9}$ Amp.	10000 Ω	4,008
3,499	172,8	176,2	174,5	$8,932 \cdot 10^{-9}$ „	9000 Ω	4,009
3,483	257,0	262,6	259,8	$8,953 \cdot 10^{-9}$ „	6000 Ω	4,007
3,478	308,6	312,4	310,5	$8,973 \cdot 10^{-9}$ „	5000 Ω	4,005
3,471	344,0	346,0	345,0	$8,955 \cdot 10^{-9}$ „	4500 Ω	4,006
Mittel:						4,007

Da der Widerstand von Thermosäule und Galvanometer nur 70,13 Ω betrug, gab demnach eine Temperaturdifferenz von $2 \cdot 10^{-5}$ Grad über 0,1 mm Ausschlag. Bei einer Füllung der Töpfe mit je 50 Liter Wasser rief also schon 1 cal einen sichtbaren Galvanometerausschlag hervor.

Die Bestimmung der Empfindlichkeit des Galvanometers, die stets kleinen Schwankungen unterworfen ist, geschah hier, wie bei allen späteren Versuchen, auf folgende Weise: Ein Akkumulator *A* (Fig. 4) wurde durch einen Gleitwiderstand *G* mit einem Edelmannschen Kompensationsapparat *K* (nach Wilsmore) verbunden. Der Gleitwiderstand wurde so eingestellt, daß an den Klemmen des Kompensationsapparates eine Spannung von genau 2 Volt herrschte. Gefunden wurde diese Einstellung durch Gegenschalten eines Normalelementes *N*, wobei das Spiegelgalvanometer als Nullinstrument diente.

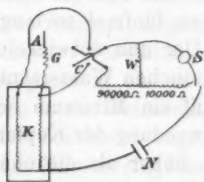


Fig. 4.

Von den Klemmen des Kompensationsapparates, der dauernd von Strom durchflossen war, wurde durch einen Stromwender *C* abgezweigt zu einem Widerstande von 90000 Ω und einem Stöpselrheostaten *W*. Im Nebenschluß zu *W*

befanden sich das Spiegelgalvanometer S und ein Widerstand von $10000\ \Omega$. Vorstehende Skizze zeigt die Schaltung sowohl für die Einstellung des Gleitwiderstandes als auch für die Empfindlichkeitsbestimmung, je nachdem das Galvanometer mit dem Normalelement oder dem $10000\ \Omega$ -Widerstande verbunden wird. Durch geeignete Wahl von W ließ sich das Galvanometer für beliebige Ausschläge eichen. Da eine Veränderung von W um $100\ \Omega$ den Ausschlag nur um etwa 2 cm änderte, wurden für $W = 100\ \Omega$, $W = 200\ \Omega$ bis $W = 2600\ \Omega$ die im Galvanometer fließenden Ströme berechnet und nun konnte durch zwei Messungen die Empfindlichkeit des Galvanometers für jeden Ausschlag bestimmt werden, indem zwischen den beiden benachbarten Empfindlichkeiten, die meist nur sehr wenig differierten, gradlinig interpoliert wurde. Diese Eichungen ließen sich so schnell ausführen, daß sie stets zwischen zwei Gangbeobachtungen eingeschoben werden konnten.

Die Kapazität des Kalorimeters wurde zunächst aus dem Wasserwerte aller an der Erwärmung teilnehmenden Stoffe berechnet. Doch soll hierauf nicht näher eingegangen werden, da sich bei den Versuchen zeigte, daß einerseits, obgleich in jedem Gefäße das Wasser mit 600 g Paraffinöl überschichtet war, die Kapazität durch Verdampfung des Wassers allmählich abnahm, andererseits die Zimmertemperatur nicht dauernd so konstant gehalten werden konnte, daß nicht eine wesentliche Änderung im Widerstande des Galvanometerstromkreises eingetreten wäre. Es wären also häufige Bestimmungen dieses Widerstandes nötig gewesen, zu denen das Galvanometer stets arretiert werden mußte. Daher blieb nur übrig, durch Zuführung bekannter Wärmemengen das Kalorimeter von Zeit zu Zeit zu eichen. Ausgeführt wurden diese Bestimmungen durch Einwurf eines auf 100° erhitzten Kupferblocks oder eines mit Wasser gefüllten vollständig geschlossenen Kupfergefäßes von 100° . Für Kupfer wurde der von Bède und Naccari angegebene Wert $0,0933$ als mittlere spezifische Wärme zwischen 15 und 100° angenommen, der sich bei den Eichungen mit Wasser als richtig erwies. Für Wasser wurde als wahrscheinlichster Wert aus den Messungen von Dieterici und Behn die mittlere spezifische Wärme zwischen 15° und 100° zu $1,000$ ermittelt.

Als Beispiel der Arbeitsmethode möge im folgenden eine willkürlich herausgegriffene Messung angegeben werden. Es wurden stets drei Ablesungen bei immer kommutiertem Strome in drei aufeinander folgenden Minuten gemacht und zu einem Mittelwerte vereinigt. Das wurde alle 5—10 Min. wiederholt und auf diese Weise der Temperaturgang gefunden. Bei der Empfindlichkeitsbestimmung ist in der Tabelle statt der Zeit der im Galvanometer fließende Strom angegeben, z. B. $i = 2,8500 \cdot 10^{-6}$ Amp.

Zeit	Ausschlag		Mittel	Differenz
	links	rechts		
5,59	292,2			
6,00		290,4	291,4	
6,01	292,6			
$i = 2,8500 \cdot 10^{-6}$	297,6	295,8	296,4	Empfind- lichkeit } $9,615 \cdot 10^{-9}$ $9,618 \cdot 10^{-9}$
$i = 3,0117 \cdot 10^{-6}$	313,6	312,6	313,1	
6,09		291,2		+ 1,5
6,10	297,4		292,9	
6,11		291,6		
6,19	295,8			+ 1,3
6,20		292,6	294,2	
6,21	295,8			
6,22	205,06 g PbCl_2 + 49,5 g Cu eingeworfen			
6,24	-138,0			-477,7
6,25		-190,0	-183,5	
6,26	-216,0			
6,29		-265,0		- 87,2
6,30	-270,0		-270,7	
6,31		-278,0		
6,34	-284,0			- 16,3
6,35		-288,0	-287,0	
6,36	-286,0			
6,39		-291,0		- 2,5
6,40	-288,0		-289,5	
6,41		-291,0		
6,44	-287,6			+ 0,9
6,45		-290,0	-288,6	
6,46	-287,0			

Zeit	Aus Schlag		Mittel	Differenz
	links	rechts		
6,49		-288,6		+1,7
6,50	-285,6		-286,9	
6,51		-287,8		
6,54	-284,2			+1,9
6,55		-286,2	-285,0	
6,56	-283,4			
6,59		-284,8		+2,0
7,00	-281,6		-283,0	
7,01		-284,0		
7,04	-280,2			+1,5
7,05		-283,0	-281,5	
7,06	-279,8			
7,09		-281,4		+1,9
7,10	-278,2		-279,6	
7,11		-280,6		
7,14	-277,0			+1,8
7,15		-279,0	-277,8	
7,16	-276,2			
7,19		-277,8		+1,7
7,20	-274,8		-276,1	
7,21		-277,0		

Bei diesem, wie bei allen andern Versuchen zeigte sich, daß der Gang 28 Min. nach Einwurf der Substanz praktisch geradlinig wurde. Er wurde daher stets aus den nun folgenden 30 Min. ermittelt und auf den Moment des Einwurfs rückwärts extrapoliert, während der Gang vor Beginn des Versuches 2 Min. vorwärts verlängert wurde. Da Eichung und Messung in der gleichen Weise berechnet wurden, ist der hierbei gemachte Fehler nur sehr klein. Bei diesem Versuche ergab sich:

$$294,2 + (2 \times 0,14) = 294,5$$

$$-286,9 - (28 \times 0,36) = -297,0.$$

Hieraus ergab sich die der Temperaturänderung proportionale Änderung der Stromstärke im Galvanometer

$$\Delta i = (294,5 + 297,0) 9,615 \cdot 10^{-9} = 5,687 \cdot 10^{-6} \text{ Amp.}$$

Das eingeworfene Gefäß hatte vor dem Versuche eine Temperatur von 304° , die Temperatur des Kalorimeters nach dem Versuche betrug 16° , seine Kapazität war vorher zu 54788 Kal. ermittelt worden. Aus diesen Daten findet man die mittlere Wärmekapazität des eingeworfenen Gefäßes nach der Formel:

$$K = \frac{54788 \cdot 70,13 \cdot 5,687 \cdot 10^{-6}}{288 \cdot 4,007 \cdot 10^{-3}} = 18,935 \text{ Kal.}$$

Hiervon ist die Wärmekapazität des Kupfers abzuziehen

$$K' = 49,5 \cdot 0,0955 = 4,727 \text{ Kal.}$$

Die mittlere spezifische Wärme ist dann

$$c = \frac{14,208}{205,06} = 0,06929.$$

In der folgenden Tabelle sind die Resultate der bisherigen Messungen zusammengestellt. Aus zusammengehörigen Messungen ist der Mittelwert genommen und der wahrscheinliche Fehler berechnet worden.

Substanz	Temperatur- intervall	Spez. Wärme	Mol.- Wärme	Mittel
PbCl ₂	15—100°	0,06640	18,45	18,52 ± 0,06
		0,06684	18,57	
		0,06636	18,44	
		0,06721	18,67	
		0,06691	18,59	
		0,06639	18,44	
	15—250°	0,06695	18,60	18,97 ± 0,04
		0,06671	18,53	
		0,06622	18,40	
		0,06852	19,04	
		0,06827	18,97	
		0,06796	18,88	
	16—300°	0,06837	19,00	19,26 ± 0
		0,06929	19,26	
	16—350°	0,06930	19,26	19,58 ± 0,06
		0,07043	19,56	
		0,07018	19,48	
		0,07090	19,70	

Substanz	Temperatur- intervall	Spez. Wärme	Mol.- Wärme	Mittel
AgCl	15—100°	0,09122	13,08	13,01 ± 0,06
		0,08992	12,90	
		0,09067	13,00	
		0,09202	13,19	
		0,08990	12,90	
		0,09104	13,05	
		0,09065	13,00	
		0,09022	12,94	
	16—250°	0,09474	13,58	13,60 ± 0,01
		0,09489	13,61	
PbJ ₂	16—300°	0,09576	13,73	13,72 ± 0,02
		0,09589	13,68	
		0,09594	13,76	
	17—100°	0,0427	13,67	13,70 ± 0,03
		0,0428	13,74	
	18—200°	0,04390	20,23	20,18 ± 0,04
		0,04370	20,12	
HgCl	18—250°	0,04498	20,73	20,75 ± 0,02
		0,04509	20,78	
AgJ	15—100°	0,0528	12,44	12,48 ± 0,065
		0,0532	12,58	
		0,0524	12,34	
		0,05345	12,60	
AgJ	19—100°	0,05892	13,83	13,82 ± 0,01
		0,05880	13,81	
Pb	18—100°	0,03095	6,408	6,409 ± 0,001
		0,03096	6,410	
	16—256°	0,03198	6,623	6,606 ± 0,009
		0,03183	6,592	
		0,03191	6,609	
		0,03182	6,590	
Weiches Glas	17—100°	0,2006	—	0,2004 ± 0,0002
		0,2002	—	
	17—213°	0,2173	—	0,2172 ± 0,0001
		0,2172	—	
	17—329°	0,2299	—	0,2304 ± 0,0004
		0,2308	—	

Substanz	Temperatur- intervall	Spez. Wärme	Mol.- Wärme	Mittel
Al	16—100°	0,2119	5,742	5,750 ± 0,006
		0,2125	5,459	
	16—304°	0,2250	6,098	6,097 ± 0,001
		0,2249	6,096	
	17—547°	0,2390	6,478	6,475 ± 0,003
		0,2388	6,471	
Ag	17—507°	0,05989	6,464	6,460 ± 0,003
		0,05981	6,456	
	16—614°	0,06163	6,651	6,641 ± 0,009
		0,06145	6,632	
Cu	15—238°	0,09510	6,048	
	15—338°	0,09575	6,090	

Die verwandten Substanzen waren chemisch rein. Nur Aluminium und Kupfer waren die gewöhnlichen technischen Metalle mit den üblichen kleinen Verunreinigungen.

Die Übereinstimmung der Versuche in dieser Tabelle ist im allgemeinen recht zufriedenstellend. Größere Abweichungen finden sich nur bei denjenigen Messungsreihen, bei denen die angewandten Substanzmengen eine so kleine Wärmekapazität hatten, daß die Änderungen der Galvanometerausschläge nur 10—20 cm betrugen wie beim Quecksilberchlorür, Silberchlorid und Bleichlorid. Bei Änderungen über 40 cm erreichten die Abweichungen vom Mittelwert nur selten 0,2 Proz., wie sich aus der guten Übereinstimmung aufeinander folgender Eichungen ergab.

Eine theoretische Verwertung der gefundenen Resultate soll demnächst erscheinen.

Zum Schlusse möchte ich einer angenehmen Pflicht genügen und Hrn. Prof. Nernst für die Anregung zu dieser Arbeit und seine freundliche Unterstützung derselben meinen verbindlichsten Dank aussprechen.

(Eingegangen 16. Dezember 1909.)

**7. Der Einfluß von Druckspannungen
auf die elliptische Polarisation des total
reflektierten Lichtes;
von Martin Volke.**

(Auszug aus der Breslauer Dissertation.)

Nach den Fresnelschen Formeln¹⁾ ist der reflektierte Strahl bei der gewöhnlichen Reflexion an durchsichtigen isotropen Medien stets linear, im Gebiet der Totalreflexion dagegen durchweg elliptisch polarisiert. Durch die Beobachtung wird dies für die Totalreflexion gut bestätigt; dagegen hat es sich gezeigt, daß auch bei gewöhnlicher Reflexion an durchsichtigen Medien, besonders in der Nähe des Brewsterschen Winkels, elliptische Polarisation auftritt. Zur Erklärung dieser zuerst von Jamin²⁾ beobachteten Elliptizität sind die an der reflektierenden Grenzfläche auftretenden Oberflächenschichten herangezogen worden, auf die schon Seebeck³⁾ 1830 hingewiesen hat. Experimentelle und theoretische Untersuchungen darüber sind besonders von L. Lorenz⁴⁾, Drude⁵⁾, Lord Rayleigh⁶⁾ und Kynast⁷⁾ ausgeführt worden.

Bei anisotropen Medien werden die Polarisationsverhältnisse bedeutend verwickelter und sind noch wenig untersucht. Für die akzidentelle Doppelbrechung ist fast ausschließlich die

1) Fresnel, Ann. de chim. et phys. (2) 17. p. 190 u. 312. 1821. Tabellen für die Fresnelschen Reflexionskoeffizienten finden sich bei H. Schulz, Dissert. Breslau 1908.

2) J. Jamin, Ann. de chim. et phys. (3) 29. p. 263. 1850; Pogg. Ann., Ergänzungsbd. 3. p. 232 u. 269. 1858.

3) A. Seebeck, Pogg. Ann. 20. p. 27. 1830.

4) L. Lorenz, Pogg. Ann. 111. p. 460. 1860; 114. p. 238. 1861.

5) P. Drude, Wied. Ann. 36. p. 865 u. 532. 1889; 43. p. 126. 1891.

6) Lord Rayleigh, Phil. Mag. 33. p. 1. 1892; 16. p. 444. 1908.

7) R. Kynast, Inaug.-Diss. Breslau 1906; abgedruckt in Ann. d. Phys. 22. p. 726. 1907.

im durchgegangenen Licht auftretende Phasendifferenz beobachtet und stets dem wirkenden Druck proportional gefunden worden.¹⁾ Im Gebiet der Totalreflexion dagegen ist hier der Einfluß des Druckes auf den Verlauf der Phasendifferenz noch völlig unerforscht. Die Untersuchung dieses Einflusses in seiner Abhängigkeit vom Einfallswinkel und für verschiedene Werte des Brechungsquotienten bildet den Hauptgegenstand der vorliegenden Arbeit; gleichzeitig ist mit Hilfe der gewonnenen Erfahrungen die von Zakrzewski²⁾ theoretisch erörterte Methode zur Messung von Phasendifferenzen experimentell verwirklicht und das Lummersche³⁾ Halbschattenprinzip auf seine Genauigkeit untersucht worden.

Elliptische Polarisation des total reflektierten Lichtes.

Als *Lichtquelle* diente die Aronssche Quecksilberdampflampe in der Lummerschen Form⁴⁾ und die Quarzlampe von Heraeus.⁵⁾ Gemessen wurde mit den Quecksilberlinien:

rot: 690 u. 622 $\mu\mu$; gelb: 579 $\mu\mu$; hellgrün: 546 $\mu\mu$; blau: 436 $\mu\mu$.

Alle Messungen der Phasendifferenz und des Reflexionsazimuts wurden mit dem „Lummer-Kynastschen *Spektralapparat*“⁶⁾ für Polarisations- und Phasendifferenzmessung“ ausgeführt. Den Strahlengang zeigt Fig. 1. Das Licht der Quecksilberlampe fällt auf den Kollimatorsplatt *S*, wird dann durch die Linsen *KL* parallel gemacht und spektral zerlegt im Wadsworthschen Prisma. Nach Durchdringen des Polarisators fällt der nun linear polarisierte Strahl auf die zu untersuchende reflektierende Fläche und wird dort im allgemeinsten Fall bei

1) F. Poekels, *Physik. Zeitschr.* 2. p. 693. 1901; *Ann. d. Phys.* 7. p. 745. 1902; *Historische Übersicht Wied. Ann.* 37. p. 144. 1889.

2) C. Zakrzewski, *Bull. de l'acad. Krakau*, Nov. 1907, *Math.* p. 1106.

3) O. Lummer, *Verh. d. Ges. deutscher Naturf. und Ärzte*, Wien 1894. II, 1. p. 79.

4) O. Lummer, *Zeitschr. f. Instrumentenk.* 15. p. 294. 1895; 21. p. 201. 1901.

5) R. Küch u. T. Retschinsky, *Ann. d. Phys.* 20. p. 536. 1906.

6) O. Lummer u. R. Kynast, *Ann. d. Phys.* 22. p. 721. 1907; auch Müller-Poulliet-Lummer, „*Strahlung*“ 2. 10. Aufl. p. 895.

der Reflexion elliptisch polarisiert. Das Licht gelangt weiter durch den Soleil-Babinetschen Kompensator¹⁾ und den Analysator in das Beobachtungsfernrohr; durch dessen Linsen wird dem Auge des Beobachters ein deutliches Bild des Kollimatorspaltes dargeboten. — Um eine Erweiterung des bisher auf mittlere Einfallswinkel beschränkten Reflexionsgebietes zu ermöglichen, wurde der Lichtstrahl nach Austritt aus dem zu untersuchenden Prisma durch nochmalige gewöhnliche Reflexion an einem Hilfsprisma in den Kompensator geleitet. Eine geringe, vorher bestimmte Phasendifferenz, die durch diese Hilfsreflexion entsteht, tritt als Korrektionsgröße in das Resultat ein. Für ganz hohe Einfallswinkel im Gebiet der Totalreflexion (etwa 80° – 86°) wurde keine Hilfsreflexion verwandt, sondern das zu untersuchende Prisma um ungefähr 180° gedreht, so daß jetzt der Ablenkungswinkel ein stumpfer wird. Bei beiden Modifikationen ist eine starke Lichtquelle

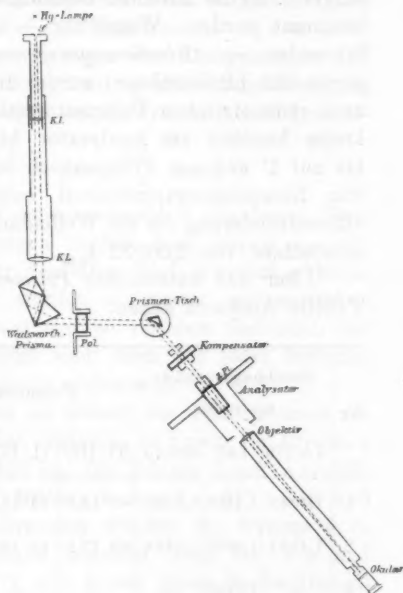


Fig. 1.

nötig. Die Justierung von Analysator und Polarisator geschah in derselben Weise wie bei Kynast.²⁾ Der Kompensator mußte für die benutzten Wellenlängen geeicht, d. h. es mußte seine Dispersion festgestellt werden. Die in der folgenden Tabelle mitgeteilten Werte $B_{\pi} - B_0$ sind die Kompensatorzahlendifferenzen, die einer Phasenverschiebung von π entsprechen. Diese

1) Vgl. P. Drude, Lehrbuch d. Optik, p. 243. Leipzig 1906.

2) R. Kynast, l. c. p. 13.

Werte ändern sich, wie man sieht, annähernd proportional der Wellenlänge

$B_{\pi} - B_o =$	12,11	13,88	15,54	16,56	18,00	20,00
$\lambda =$	436	492	546	579	622	690 $\mu\mu$

Der Kompensator-Nullpunkt war 56,46 (für alle Wellenlängen). Er ist mit einer Genauigkeit von mindestens $\frac{1}{2000} \lambda_{546}$ bestimmt worden. Wegen der — leicht zu erheblichen Fehlern führenden — *Orientierungsungenauigkeit*¹⁾ des Kompensators gegen die Einfallsebene wurde die Phasendifferenz stets bei zwei symmetrischen Polarisatorstellungen gemessen. Die Teilkreise konnten am Analysator bis auf 3,6'', am Polarisator bis auf 1' und am Prismentisch bis auf 1'' abgelesen werden. Ein Kompensatortrommelteil entspricht 0,00064 π Phasendifferenzänderung für die Wellenlänge 546 $\mu\mu$ oder einem Gangunterschied von 0,00032 λ_{546} .

Über das untersuchte *Prismenmaterial* möge die folgende Tabelle Auskunft geben.

Nr.	Brechungsverhältnis n für			Prismenwinkel			Material	Hypotenuse cm ²
	$\lambda = 579$	546	436 $\mu\mu$	(II, III)	(I, III)	(I, II)		
1	1,4593	1,4605	1,4664	43° 13,5'	43° 13,5'	93° 33'	SiO ₂ amorph	2,2 × 2,9
2	1,4593	1,4605	1,4664	43 12,2	43 14	93 33,8'	SiO ₂ amorph	2,4 × 4,5
3	—	1,5188	—	—	—	—	Glas	4 × 5
4	—	1,5196	—	44 46,8	45 13,8	89 59,4	„	4 × 2,5
5	—	1,5196	—	—	—	—	„	4 × 2,5
6	1,9067	1,9166	1,9632	31 27,8	31 26,8	117 5,4	Silikat- Flint-Glas 79 % PbO 21 % SiO ₂	4 × 5

Bemerkungen: Nr. 1 und 2 sind geliefert von Heraeus-Hanau, geschliffen von Zeiss. — Nr. 3 von Zeiss. — Nr. 4 und 5 bildeten früher einen Würfel. — Nr. 6 von Zeiss.

1) R. Hennig, Gött. Nachr. 3. p. 874. 1887.

Bei 1, 2 und 6 durchsetzt der Grenzstrahl zwischen gewöhnlicher und totaler Reflexion die Kathetenflächen für $\lambda = 546 \mu\mu$ sehr nahezu senkrecht. — Prisma 1 und 6 sind schon von Kynast¹⁾ untersucht worden, der einen auffallend anomalen Verlauf der Phasendifferenz im Gebiet der Totalreflexion beobachtet hat.

Unsere Messungen wurden folgendermaßen ausgeführt: Der Polarisator blieb zunächst auf ein Einfallssazimut (α) von $+45^\circ$ gestellt. Durch gleichzeitiges Bewegen des Kompensators und Analysators wurde die Stellung mit größter Dunkelheit im Gesichtsfelde gesucht und hierfür am Analysator das Reflexionsazimut

$$\chi = \arctg \left(\frac{R_p}{R_s} \right) = \arctg \left(\frac{\sigma_p}{\sigma_s} \cdot \tg \alpha \right)$$

und am Kompensator die Kompensatorzahl B abgelesen. Derselbe Satz von Beobachtungen mußte dann bei $\alpha = -45^\circ$ wiederholt werden. Alle für denselben Einfallswinkel φ beobachteten Werte B bzw. χ wurden zu einem arithmetischen Mittel vereinigt. Die Prismen wurden vor dem Gebrauch mit Säuren und Alkohol gereinigt und dann vor jeder Messung mit einem weichen Lederlappen abgewischt.

In dieser Weise kamen im Gebiet der Totalreflexion zunächst elf Beobachtungsreihen zustande, und zwar für Prisma 1 mit $\lambda = 622,5, 579, 546, 436 \mu\mu$, für Prisma 2 mit $\lambda = 690, 579, 546, 436 \mu\mu$ und für Prisma 6 mit $\lambda = 579, 546$ und $436 \mu\mu$. Für jeden Einfallswinkel wurden bei Prisma 6 in der Regel vier Beobachtungen gemacht (zwei bei $+\alpha$ und zwei bei $-\alpha$); bei Prisma 1 und 2 war diese Beobachtungsanzahl 6, für die Wellenlänge $436 \mu\mu$ aber stets mindestens 8.

Das Reflexionsazimut χ lag in gesetzmäßiger Weise nahe bei $\mp 45^\circ$, dem gewählten Einfallssazimut von $\pm 45^\circ$ entsprechend.

Die gefundenen Werte der Phasendifferenz sind in Figg. 2, 3 und 4 graphisch dargestellt. In diesen Zeichnungen sind außerdem für zwei verschiedene Wellenlängen die theoretischen Kurven gestrichelt angegeben (nach der Fresnelschen Formel

$$\tg \frac{\Delta}{2} = \frac{\cos \varphi \sqrt{\sin^2 \varphi - n^2}}{\sin^2 \varphi}$$

1) R. Kynast, l. c. p. 23.

berechnet) und durch kleine Buchstaben kenntlich gemacht worden (b = blau, g = grün theoretisch). Zum Vergleich ist die für „Grün“ ($\lambda = 546 \mu\mu$) von Kynast gemessene Kurve, in Fig. 2 mit „K.G.“ bezeichnet, eingetragen worden. Abszissen sind die Einfallswinkel $\delta\varphi$, die vom Grenzwinkel (φ_g) der

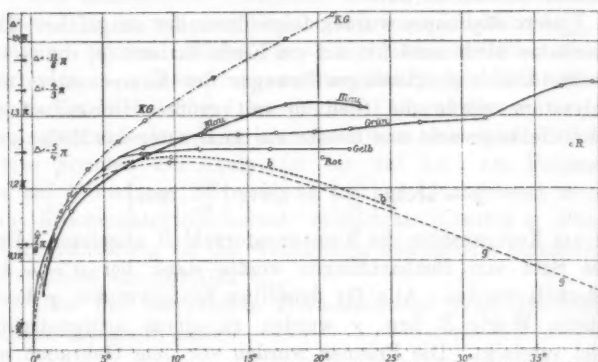


Fig. 2. Prisma 1.

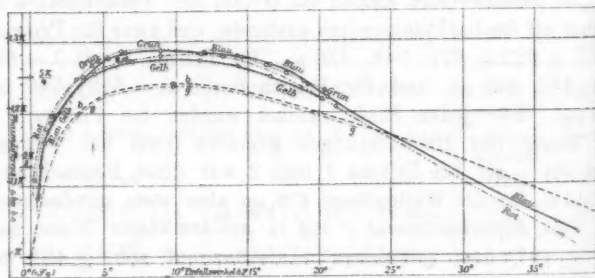


Fig. 3. Prisma 2.

totalen Reflexion ab gerechnet werden, so daß $\delta\varphi = \varphi - \varphi_g$ wird. Ordinate ist die Phasendifferenz $\Delta = \delta_p - \delta_s$, in Teilen von π angegeben. Sie läßt sich aus der abgelesenen Kompensatorzahl B nach folgender Formel berechnen:

$$\Delta = \frac{56,46 - B}{B_{\pi} - B_0} \cdot \pi.$$

Dabei sind die Werte $B_\pi - B_0$ aus der oben mitgeteilten Dispersionstabelle zu entnehmen. Aus diesen Messungen ergibt sich folgendes:

1. Bei Prisma Nr. 1 (Fig. 2) verläuft die Δ -Kurve jetzt für $\lambda = 546 \mu\mu$ bedeutend niedriger als bei der Messung von R. Kynast. Es liegt die Vermutung nahe, daß inzwischen Änderungen im Material vorgekommen sind. Anomal bleibt

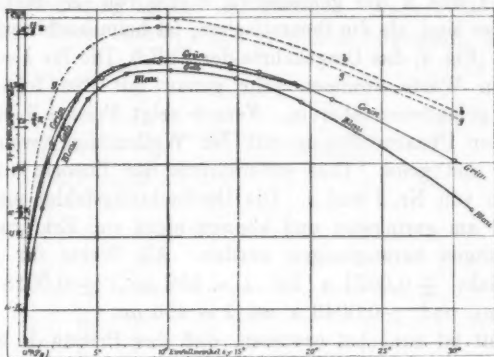


Fig. 4. Prisma 6.

die Phasendifferenz noch immer, da $|\Delta|$ bei hohem Einfallswinkel weiter wächst, anstatt bis zum Wert $-\pi$ bei streifen-der Inzidenz abzunehmen.

Mit wachsender Wellenlänge nimmt $|\Delta|$ bei demselben Einfallswinkel im allgemeinen ab, wie in der Theorie verlangt, nur erfolgt diese Abnahme für den mehr horizontalen Teil der gemessenen Kurven etwa zehnmal so stark, als sich theoretisch für dieselbe Stelle ergibt. Der mittlere Fehler M_Δ betrug für „Rot“ $\pm 0,0067 \pi$, für die anderen Farben $\pm 0,0047 \pi$. Hierbei bezeichnet M_Δ den Durchschnittswert für den mittleren Fehler

$$\sqrt{\frac{\sum(v^2)}{p(p-1)}}$$

eines Partialresultates Δ_1 , das aus p Kompensatorablesungen bei demselben Einfallswinkel $\delta\varphi$ und demselben Einfallswinkel α gewonnen ist. (Der Durchschnitt ist aus allen M_Δ einer Reihe als arithmetisches Mittel berechnet.)

2. Das Prisma Nr. 2 (Fig. 3) zeigt die geringste Anomalie. Die Phasendifferenz sinkt wie bei Nr. 1 mit wachsender Wellenlänge, und zwar hier ungefähr in dem von der Theorie geforderten Maße. Rot und gelb haben allerdings falsche Reihenfolge, doch liegt ihre Differenz wohl innerhalb der Fehlergrenzen. Diese waren $M_A = \pm 0,0080 \pi$ für Rot, sonst $\pm 0,0045 \pi$.

3. Während bei diesen niedrigbrechenden amorphen SiO_2 -Prismen 1 und 2 die gemessenen Werte von $|\Delta|$ fast durchweg größer sind als die theoretischen, ist beim hochbrechenden Prisma 6 (Fig. 4) das Umgekehrte der Fall.¹⁾ Die für $\lambda = 546 \mu\mu$ erhaltenen Werte stimmen sehr genau mit den früher von Kynast gefundenen überein. Ferner zeigt Prisma 6 eine Zunahme der Phasendifferenz mit der Wellenlänge, wenigstens für blau und grün. Dies widerspricht der Theorie und dem Verhalten von Nr. 1 und 2. Die Beobachtungsfehler sind hier bei Nr. 6 am geringsten und können nicht zur Erklärung der Abweichungen herangezogen werden. Als Werte für M_A ergaben sich: $\pm 0,0021 \pi$ bei $\lambda = 579 \mu\mu$, $\pm 0,0015 \pi$ bei $\lambda = 546 \mu\mu$ und $\pm 0,0043 \pi$ bei $\lambda = 436 \mu\mu$.

Damit ist zunächst erwiesen, daß das Prisma 1 ein besonders merkwürdiges Exemplar ist und daß amorphes SiO_2 an sich nicht solche Anomalien zeigt, wie die Kynastsche Messung an Nr. 1 vermuten ließ. Es war weiter zu untersuchen, wie weit diese großen Abweichungen von der Theorie bei 1 und die kleineren bei 2 und 6 auf Spannungen im Prismenmaterial zurückgeführt werden können. Mittels einer sehr empfindlichen von K. Sorge angegebenen Methode zum Beobachten kleiner Phasendifferenzen²⁾ wurden daher alle drei Exemplare 1, 2 und 6 zunächst im durchgehenden Licht untersucht; sie zeigten sämtlich Spannungen, am meisten Nr. 1, am wenigsten Nr. 2. Gleichzeitig erwies sich das Prisma 4 als praktisch spannungsfrei.

An diesem Prisma 4 wurde daher eine eingehende *Untersuchung über den Einfluß des Druckes auf den Phasendifferenzverlauf* für $\lambda = 546 \mu\mu$ durchgeführt. Das Prisma stand dabei

1) In der Abhandlung von R. Kynast ist die theoretische Phasendifferenz für $n = 1,9166$ unrichtig (zu klein) angegeben, l. c. p. 23.

2) K. Sorge, Inaug.-Diss. Breslau 1909.

in einem Metallgestell zwischen zwei Pappscheiben von etwa 1 mm Dicke. Durch Schraubendrehung ließ sich von oben eine Eisenplatte mehr oder weniger stark anpressen, so daß ein beliebig starker und ziemlich gleichmäßiger Druck in der gewünschten Richtung parallel oder senkrecht zur brechenden Kante des Prismas ausgeübt werden konnte.

Die beobachteten Reflexionsazimute χ zeigten kaum eine merkliche Änderung infolge des Druckes. Anders die Phasendifferenzen. Diese sind in Fig. 5 graphisch dargestellt. Abszisse

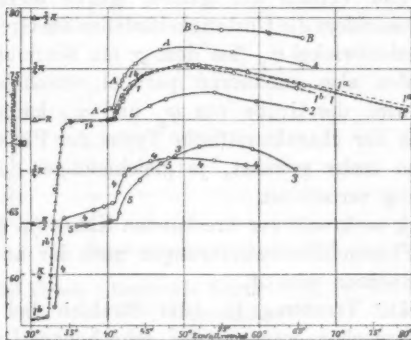


Fig. 5. Prisma 4. Druckmessungen.

ist der Einfallswinkel φ , Ordinate Δ bzw. B . Kurve Nr. 1 gibt die Messungsergebnisse beim Druck Null an; Nr. 2, 3, 4 und 5 enthalten die Phasendifferenz bei einseitigem Druck parallel zur brechenden Kante, also senkrecht zur Einfallsebene, und zwar nimmt der Druck in der angegebenen Reihenfolge zu. A und B entsprechen einseitigem Druck in der Einfallsebene, also senkrecht zur brechenden Kante. Nr. 1b enthält die Resultate einer Messung unmittelbar nach dem Aufhören der Druckwirkung 3. Hinzugefügt ist noch die nach der Fresnelschen Formel berechnete Kurve 1a. Um die Wirkung des Druckes auf die Phasendifferenz auch im nicht total reflektierenden Gebiet zu prüfen, wurde die Messung, soweit es technisch möglich war, auf Einfallswinkel ausgedehnt, die kleiner als der Grenzwinkel waren. Die Änderung des Druckes von einer Messung zur folgenden konnte nach der

Methode von Sorge qualitativ verfolgt werden. Bei Kurve 3 war der Druck deutlich unregelmäßig verteilt, woraus sich wohl auch die dort erheblich geringere Genauigkeit erklärt.

Die Messungen zeigen folgendes:

1. Das Prisma 4 ergab ohne Druck sehr nahezu der Theorie entsprechende Phasendifferenzwerte (Kurve 1).

2. Wachsendem Druck in Richtung der brechenden Kante entspricht ein Sinken der Phasendifferenz an der Stelle $|\Delta_{\max}|$ von $|\frac{5}{4}\pi|$ nach Null hin.

3. Art und Verlauf der ganzen Kurve bleibt ungefähr erhalten, insbesondere die Unstetigkeitsstellen am Grenzwinkel φ_g und Polarisationswinkel φ_p (bei dem χ ein Minimum ist). Die Kurven werden also annähernd parallel verschoben. Durch den Druck wird die Größe von φ_g und φ_p kaum geändert. Ferner bleibt der charakteristische Typus der Phasendifferenzkurve um so mehr gewahrt, je gleichmäßiger der Druck in einer Richtung verteilt ist.

4. Druck senkrecht zur brechenden Kante (in der Einfallsebene) gibt Phasendifferenzänderungen nach der anderen Seite, also ein Anwachsen von $|\Delta|$.

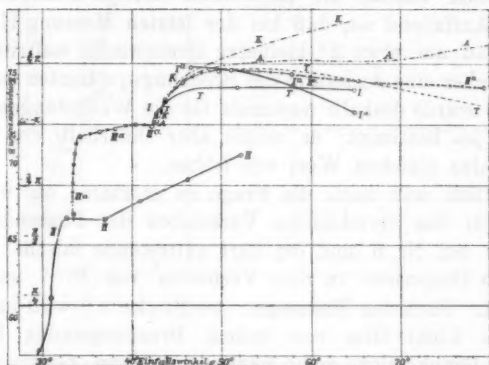
5. Direkte Trennung in zwei Strahlen bei den letztgenannten Versuchen war nur bei sehr hohem Druck zu erkennen.

6. Nach Aufhören des Druckes ergaben sich sogleich wieder die normalen Δ -Werte.

Wie zu erwarten ist, bewirkt ein Druck in Richtung der brechenden Kante eine stärkere Änderung der Phasendifferenz, da hier der Lichtstrahl stets senkrecht zur optischen Achse des gepreßten Glases verläuft, welches nun wie ein Kristall wirkt, während er bei der anderen Druckrichtung einen spitzen Winkel mit der optischen Achse bildet.

Da der Druck die Δ -Kurve nahezu parallel verschiebt, scheint die im Glas durchlaufene Schichtdicke wenig für die Erscheinung in Betracht zu kommen. Nahe am Grenzwinkel φ_g ist die durchlaufene Strecke am kleinsten, um für streifende Inzidenz ihr Maximum zu erreichen. Wenn sie also zur Wirkung kommt, müßte der Einfluß des Druckes im Gebiet der Totalreflexion mit wachsendem Einfallswinkel zunehmen. Das ist jedoch nach den Messungen nur in ganz geringem Maße

der Fall. Man würde wohl höheren Druck und verschiedene Prismengrößen anwenden müssen, um zu entscheiden, wie der im Prisma durchlaufene Weg auf die Phasendifferenzänderung durch Druck einwirkt und welchen Einfluß darauf die durch Druck etwa erzeugte Modifikation der reflektierenden Fläche hat.



I und II bei Druck \parallel brechende Kante, K, A, Ia, IIa ohne Druck,
T theoretisch.

Fig. 6. Prisma 1.

Dieselbe Methode wurde auf das Prisma 1 angewandt. In Fig. 6 sind die Messungen dargestellt. Die Kurven I und II entsprechen einseitigem Druck parallel zur brechenden Kante. Ia und IIa sind Messungen ohne Druck, sogleich nach der Beseitigung des bei I bzw. II wirkenden Druckes angestellt.

Außerdem ist noch die Messung Kynast (K), die theoretische Kurve (T) und meine Anfangsmessung (A) von Fig. 2 (Grün) zum Vergleich eingezeichnet.

Es zeigte sich folgendes:

1. Durch einen gewissen Druck in Richtung der brechenden Kante wurde ein Verlauf der Phasendifferenz erzielt, der annähernd den nach Fresnel berechneten Werten für diesen Brechungsindex entspricht (Kurve I auf Fig. 6).

2. Nach dem Versuch I blieb das Prisma fast unverändert in Größe und Verlauf der Phasendifferenz, sobald der Druck wegfiel (Kurve Ia).

3. Ein größerer Druck rief, wie beim Glasprisma 4, weiteres Sinken der Phasendifferenz hervor (Kurve II).

4. Nach der Messung II kehrte es zum normalen Phasendifferenzverlauf zurück (IIa), so daß also jetzt ein ziemlich normales Prisma daraus geworden war, das nach jeder Pressung wieder nahezu die theoretisch richtige Phasendifferenz ergab. Auffallend ist, daß bei der letzten Messung IIa (ohne Druck) ein um etwa 2° kleinerer Grenzwinkel auftritt. Man könnte daher eine Änderung des Brechungsquotienten vermuten. Derselbe wurde deshalb nochmals für die Wellenlängen 546μ und 436μ bestimmt; er zeigte aber innerhalb der Fehlergrenzen den gleichen Wert wie früher.

Endlich war noch die Frage zu erörtern, ob wohl ein Grund für das verschiedene Vorzeichen der Phasendifferenzanomalie bei Nr. 6 und die dort auftretende falsche Farbenfolge (im Gegensatz zu dem Verhalten von Nr. 1 und 2) zu finden ist. Nach den Messungen von Pockels¹⁾ wird im durchgehenden Licht Glas von hohem Brechungsindex bei einseitigem Druck nicht mehr negativ, sondern positiv doppelbrechend. Die Grenze zwischen beiden Arten der Druckwirkung liegt bei $n = 1,88$. Für unser Prisma 6 mit dem Brechungsindex 1,9166 war also auch im Gebiet der Totalreflexion eine Wirkung des Druckes zu erwarten, die der bei den übrigen Prismen entgegengesetzt ist. Die Beobachtungen haben dies durchaus bestätigt. Die Resultate sind in Fig. 7 enthalten. Es stellt dar: Kurve I und II (gestrichelt) eine Messung ohne Druck für 546μ bzw. 436μ , III und IV enthalten Phasendifferenzwerte für 546μ bei Druck senkrecht zur brechenden Kante. Derselbe Druck wie bei IV lieferte für $\lambda = 436\mu$ die in IVa mitgeteilten Werte.

Die Messung I zeigt jetzt etwas niedrigere Werte von B als die entsprechende frühere (Kurve „Grün“ auf Fig. 4). Das Prisma war in der Zwischenzeit bei anderen Versuchen durch Auffallen auf eine Eisenplatte stark erschüttert worden und hatte dadurch wohl seinen Spannungszustand geändert.

Das Ergebnis ist also folgendes: Die absoluten Werte der Phasendifferenz (Δ) wurden bei Prisma 6 durch Druck

1) F. Pockels, l. c.

senkrecht zur brechenden Kante erniedrigt. Ferner liegen die Werte der Phasendifferenz für die Wellenlänge $436\text{ }\mu\mu$ bei Druck niedriger als für $546\text{ }\mu\mu$, da die durch den Druck hervor-

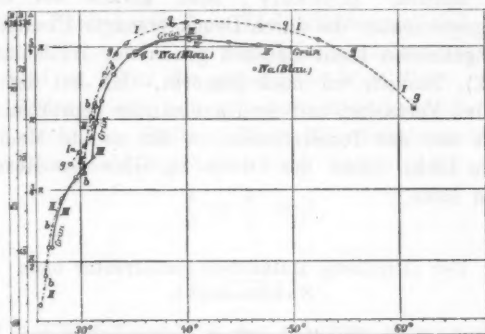


Fig. 7. Prisma 6.

gebrachte Änderung von $|A|$ auch hier mit abnehmender Wellenlänge wächst.

Man kann demnach die in Figg. 4, 2, 3 bei Nr. 6 und bei Nr. 1 und 2 aufgetretene Phasendifferenzanomalie auf dieselbe Ursache zurückführen, trotzdem $|\Delta|$ bei Prisma 6 vom theoretischen Wert nach oben, bei Prisma 1 und 2 dagegen nach unten abweicht: es dürften nämlich alle drei Prismen in gleicher Weise bei der Herstellung, insbesondere beim Erstarren einen Druck *senkrecht* zur brechenden Kante erhalten haben, der dann bei Nr. 1 und 2 ein Anwachsen und bei Nr. 6 ein Sinken von $|\Delta|$ in der Totalreflexion bewirkt hat. Aus den letzten Druckbeobachtungen an Nr. 6 (Fig. 7) erklärt es sich auch, daß in Fig. 4 $|\Delta_{450}|$ für dieses Prisma kleiner als $|\Delta_{540}|$ gefunden wurde.

Damit ist klargestellt, daß für Phasendifferenzanomalien in der Totalreflexion in hohem Maße Spannungen im Prismenmaterial verantwortlich zu machen sind. Vielleicht rührt die besonders bei amorphem SiO_2 und hochbrechendem Glas sich zeigende Abweichung daher, daß Prismen aus diesen Materialien infolge ihrer schwierigeren Herstellung besonders leicht Spannungen erhalten.

Als besonders auffallend und kaum erklärlich muß das hohe Ansteigen von $|A|$ für große Einfallswinkel und die relativ große Änderung von A mit der Wellenlänge bei Prisma 1 bezeichnet werden. (Pockels¹⁾ fand gerade bei niedrigem Brechungsquotienten die durch Druck erzeugte Phasendifferenz im durchgehenden Licht ziemlich genau der Wellenlänge proportional.) Endlich sei noch bemerkt, daß bei den vielfach angestellten Versuchen mit zwei aneinander gepreßten Prismen über das bei der Totalreflexion in das zweite Medium eindringende Licht leicht der Druck im Glas das Resultat beeinflussen kann.

**Der elliptische Halbschattenanalysator nach
Zakrzewski.**

Zakrzewski schlägt in seiner Abhandlung²⁾ eine Methode vor, durch welche die in der Polarimetrie viel benutzte Einstellung auf Halbschatten auch für die Untersuchung von elliptisch polarisiertem Licht angewandt werden kann:

Es wird vor einem Nicol eine Doppel- $\lambda/4$ -Platte aus Quarz befestigt, so daß Nicol und Platte zusammen ein drehbares Ganze bilden, den sogenannten „elliptischen Halbschattenanalysator“. Die Quarzplatte ist aus zwei $\lambda/4$ -Blättchen mit scharfer Trennungskante so zusammengefügt, daß die optischen Achsen in den beiden Hälften I und II senkrecht zueinander und zum Lichtstrahl stehen. Mit den Hauptrichtungen des Nicol bilden die Achsen einen kleinen Winkel β . Geht jetzt ein elliptisch polarisierter Lichtstrahl durch den Kompensator und diesen „elliptischen Analysator“, so sieht man nur dann die Felder I und II der beiden Plattenhälften gleich hell ($J_I = J_{II}$), wenn der Kompensator die vorhandene Phasendifferenz kompensiert, wenn also lineares Licht auf die Doppelplatte fällt. Der elliptische Analysator zeigt dann „Halbschatten“ und behält ihn bei einer ganzen Umdrehung um 360° . Es ändert sich beim Drehen nur die absolute Helligkeit des Ge-

1) F. Pockels, l. c.

2) C. Zakrzewski, Bull. de l'acad. des sciences de Cracovie, Nov. 1907. Math. p. 1016. Krakau.

samtgesichtsfeldes. Für die dunkelste Halbschattenstellung gilt die Beziehung:

$$\operatorname{tg}(2\varepsilon) = -\operatorname{tg}(2\beta) \cdot \cos(2\pi\Gamma)^{-1},$$

wo ε der Winkel zwischen Lichtschwingung und der einen optischen Achse, und Γ der vom Quarzplättchen erzeugte Gangunterschied ist. Für den günstigsten Wert $\Gamma = 1/4$ wird $\varepsilon = 0$. Das noch durch eine wahrnehmbare Helligkeitsdifferenz $J_1 - J_{II}$ bei der dunkelsten Stelle meßbare Ellipsenachsenverhältnis im untersuchten Licht ergibt sich nach Zakrzewski zu

$$\frac{b}{a} \geq \frac{F}{4} \cdot \operatorname{tg} \beta,$$

wobei

$$\frac{J_1 - J_{II}}{\frac{1}{2}(J_1 + J_{II})} \geq F$$

ist. F bezeichnet das Maß der erzielten photometrischen Genauigkeit. Zakrzewski setzt $F = 0,01$.

Für die Phasendifferenz Δ folgt hieraus als untere Grenze

$$\Delta = \delta_p - \delta_s \geq \frac{F}{2} \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin(2\chi)},$$

wobei χ das Reflexionsazimut $\operatorname{arctg} R_p/R_s$ ist. Bei $\chi = 45^\circ$ ist Δ am genauesten bestimmbar; es wird dann, wenn wir $\beta = 2,5^\circ$ setzen, $\Delta \geq 4/100000 \lambda$.

Die von mir benutzte Quarzdoppelplatte ist von Steeg und Reuter (Homburg v. d. H.) geliefert worden. Sie hat etwa 22 mm Durchmesser und ist mit den beiden Deckgläsern in einen Eisenring gefaßt. (In Fig. 1 ist die Doppelplatte durch *Z. Pl.* gekennzeichnet.) Sie wird durch Autokollimation möglichst senkrecht zum Strahlengang gestellt. Die Messung von Phasendifferenzen geschieht in folgender Weise: Man bestimmt den Einfallswinkel φ an der reflektierenden Fläche und stellt dann das Beobachtungsfernrohr so, daß das Bild des Kollimatorspaltes in die Mitte des Fadenkreuzes fällt.²⁾ Entfernt man das Okularlinsensystem und setzt an die Stelle

1) In der Originalabhandlung ist irrtümlich in dieser Gleichung ε und β statt 2ε und 2β angegeben; l. c. p. 1020.

2) So beseitigt man die von Zehnder störend empfundene Schwierigkeit genauer Einfallswinkelmessung. L. Zehnder, Ann. d. Phys. 26. p. 995. 1908

des Fadenkreuzes einen Okularspalt, so sieht man mittels des Fernrohrobjektivs als Lupe (eventuell unter Benutzung eines geeigneten Brillenglases) in dem runden Gesichtsfeld scharf die Trennungslinie der Plättchenhälften. Jetzt dreht man den Kompensator so lange, bis das ganze Gesichtsfeld gleichmäßig hell ist (bei dem benutzten Plättchen verschwand hierbei im Halbschattenfelde die Trennungslinie nur teilweise); in der Analysatorstellung, welche größte Dunkelheit des Gesichtsfeldes hervorruft, ist diese Halbschatteneinstellung sehr empfindlich, schon eine kleine Verrückung des Kompensators aus der richtigen Lage ruft eine deutliche Helligkeitsverschiedenheit hervor.

In dieser Weise wurde eine Reihe von Phasendifferenzmessungen mit der Wellenlänge 546μ an Prisma Nr. 4 und 6 in der Umgebung von φ_g angestellt. Die erhaltenen Werte sind in den folgenden Tab. a) und b) mitgeteilt.

a) Prisma 4 bei φ_g .

φ	δ_φ	$B_1(+\alpha)$	$B_2(-\alpha)$	B	m_1	m_2	M
39° 13' 35''	-1° 56' 35''	71,62	71,65	71,637	0,0088	0,0088	0,0029
40 4 53	-1 4 17	71,67	71,71	71,69	0,0082	0,0200	0,0054
41 3 51	-0 5 19	71,70	71,88	71,79	0,0082	0,0150	0,0043
41 17 0	+0 7 50	72,51	72,82	72,67	0,0141	0,0082	0,0041
41 43 13	+0 34 3	73,30	73,50	73,40	0,0224 (0,0295)	0,0133 (0,0575)	0,0065

b) Prisma 6 bei φ_g .

φ	δ_φ	$B_1(+\alpha)$	$B_2(-\alpha)$	B	m_1	m_2	M
29° 5,6'	-2° 21,4'	67,94	71,39	69,65	0,012	0,150	0,0380
30 8,2	-1 18,8	69,44	71,153	70,24	0,058	0,089	0,0265
30 38,5	-0 48,5	69,78	71,45	70,62	0,037	0,040	0,016
31 10,8	-0 16,2	70,042	71,735	70,89	0,022	0,043	0,0122
31 26,5	-0 0,5	71,292	71,915	71,553	0,015 (0,058)	0,039 (0,034)	0,0103
31 42,2	+0 15,2	72,38	72,96	72,67	0,033	0,023	0,0103

Hierin bedeutet:

1. φ den Einfallswinkel.
2. δ_φ den Winkel $\varphi - \varphi_g$.
3. B_1 das aus vier Kompensatorablesungen bei positivem Einfallsaizimut $(+\alpha)$ gewonnene arithmetische Mittel.
4. B_2 dasselbe für $-\alpha$.
5. B den Wert $\frac{1}{2}(B_1 + B_2)$.
6. m_1 den mittleren Fehler $\sqrt{\frac{1}{3}\Sigma(v^2)}$ für eine Beobachtung der Reihe, aus

welcher B_1 gewonnen ist. 7. m_2 das gleiche für die zu B_2 gehörenden vier Beobachtungen. 8. $M = \frac{1}{4} \sqrt{m_1^2 + m_2^2}$ den mittleren Fehler des Gesamtergebnisses B . (m und M ist hier in Teilen von B angegeben.)

In der Totalreflexion machte sich jede etwa vorhandene Spannung im durchstrahlten Material störend durch Inhomogenität des Halbschattenfeldes bemerkbar. Daher sind Prisma 4 und 6 in der Genauigkeit sehr verschieden, da Nr. 6 Spannungen hatte, Nr. 4 dagegen fast gar nicht. Die mittlere Genauigkeit beträgt nach Tab. a) und b)

$$\text{bei 4: } m_A = \frac{42}{100000} \lambda; \text{ bei 6: } m_A = \frac{154}{100000} \lambda.$$

Ferner ist bei Prisma 4 die Umgebung des Haupteinfallswinkels bei gewöhnlicher Reflexion in Luft an Glas nach der Zakrzewskischen Methode auf Phasendifferenzen untersucht worden, um die Brauchbarkeit des Verfahrens in diesem Gebiet zu prüfen.

Die Resultate dieser Beobachtungen sind in der folgenden Tab. c) wiedergegeben.

c) Prisma 4 in der Umgebung von φ_p .

φ	$\delta\varphi = \varphi - \varphi_p$	B_1	B_2	B	m_1	m_2	M
53° 11,8'	-3° 27,4'	54,795	56,415	55,605	0,013	0,030	0,0082
54 11,8	-2 27,4	54,570	55,870	55,220	0,041	0,028	0,0125
56 11,8	-0 27,4	51,850	47,71	49,530	0,033	0,185	0,0805
56 51,8	+0 12' 34''	47,970	43,493	45,731	0,101	0,111	0,038
57 40,4	+1 1,2'	44,535	42,150	43,342	0,058 (0,234)	0,052 (0,204)	0,020
58 51,8	+2° 12,6	42,895	41,893	42,494	0,033	0,014	0,014
59 51,8	+3 12,6	42,195	41,602	41,907	0,031	0,027	0,0104

Die Genauigkeit wächst hier annähernd proportional $\sin(2\chi)$, wie die angegebene Formel verlangt. Am Polarisationswinkel (mit $\chi_{\min.}$) ist sie am geringsten. Es ergab sich dort: $m_A = \frac{400}{100000} \lambda$, also eine noch ziemlich befriedigende Genauigkeit.

In allen drei Tabellen sind noch bei je einem Einfallswinkel in Klammern Werte von m_1 und m_2 angegeben, welche die Genauigkeit der entsprechenden Kompensatorbeobachtungen

B_1 und B_2 ohne Benutzung der Zakrzewskischen Quarzplatte zeigen.

Die Quarzplatte erhöht also die Genauigkeit in normalen Fällen auf etwa das Doppelte. Sie ist nicht anwendbar bei Totalreflexion in gepreßtem Glas und allen Spannungen zeigenden Medien, auch Unebenheiten einer Fläche setzen die Genauigkeit bei der gewöhnlichen Reflexion herab. Am meisten zeigt sich der Vorteil der Methode bei Messungen von Δ in der Nähe des Polarisationswinkels.

Nach Abschluß dieser Versuche erschien eine Arbeit von Zehnder.¹⁾ Der Verfasser teilt darin Messungen von Phasendifferenzen mit, die er mit Hilfe seines Halbschattenanalysators (Nicol und Rauchglasplatte nebeneinander) angestellt hat. Soweit es sich nach seinen Angaben beurteilen läßt, hat er Δ etwa ebenso genau bestimmen können, wie bei den in diesem Abschnitt mitgeteilten Messungen nach dem Verfahren von Zakrzewski.

Das Lummersche Halbschattenprinzip.

Lummer²⁾ hat folgende Anordnung für ein Halbschattenpolarimeter angegeben: Man versilbert die Hypotenusenfläche eines spannungsfreien rechtwinkligen Glasprismas und nimmt einen Teil des Silberbelages wieder fort. Dabei hat man dafür zu sorgen, daß die beiderlei Felder (das „Glasfeld“ und das „Silberfeld“) mit scharfen Rändern aneinander stoßen und eine zur brechenden Prismenkante senkrechte Richtung haben. Dieses Prisma setzt man auf den Spektrometertisch und orientiert es so, daß die durch einen Polarisator gegangenen Kollimatorstrahlen durch die eine Kathetenfläche eintreten, am Glasfeld der Hypotenusenfläche gerade eben total reflektiert werden und durch die andere Kathete das Prisma verlassen. Das Licht gelangt dann in das Beobachtungsfernrohr, welches anstatt des Fadenkreuzes einen Okularspalt mit einer nach vier Seiten variablen rechteckigen Öffnung besitzt. Dieselbe muß bei richtiger Anordnung vollkommen von dem Bilde des Kollimatorspaltes ausgefüllt werden.

1) L. Zehnder, l. c. p. 990.

2) O. Lummer, Verh. d. Ges. deutsch. Naturf. u. Ärzte, Wien 1894. II, 1. p. 79; Zeitschr. f. Instrumentenk. 15. p. 293. 1895.

Nach Fortnahme des Okulars sieht das durch den Spalt blickende Auge die ganze Prismenfläche leuchtend und kann mittels des Fernrohrobjektivs als Lupe wiederum eventuell unter Benutzung eines geeigneten Brillenglases scharf auf die Trennungslinie zwischen dem Glas- und Silberfeld der Hypotenusenfläche akkommodieren. Bringt man jetzt vor dem Objektiv einen Analysator in den Strahlengang, so ist das Halbschattenprinzip verwirklicht. Das Entstehen des Halbschattens läßt sich leicht aus den Polarisationsverhältnissen bei der Reflexion am „Glasfeld“ und am „Silberfeld“ übersehen. Für das von mir benutzte Prisma Nr. 4 betrug die Phasendifferenz am Grenzwinkel φ_g der totalen Reflexion für das Glasfeld $-\pi$ und für das Silberfeld etwa $+\pi/7$. Das Reflexionsazimut χ ist beim Glasfeld gleich $-\alpha$ und beim Silberfeld nahezu gleich $+\alpha$, wenn $+\alpha$ das Einfallszimut bedeutet. Da aber der Wert $-\pi$ für Δ nur einem Vorzeichenwechsel von χ entspricht, so wird das Glasfeld ($\Delta = -\pi$, $\chi = -\alpha$) unter dem gleichen Azimut $+\alpha$ linear polarisiert sein, wie der einfallende Strahl. Das Silberfeld dagegen ist schwach elliptisch polarisiert. Genähert kann man es jedoch auch als lineares Feld, aber mit dem Azimut $-\alpha$, betrachten. Daher hat man ein Halbschattenfeld in den beiden Gesichtsfeldhälften vor sich, dessen Schwingungsebenen den „Halbschattenwinkel“ 2α einschließen, und zwar wird Halbschatten eintreten, sobald die Analysatorschwingungsebene in der Reflexionsebene oder senkrecht dazu steht.

Diese Betrachtung gilt zunächst für den Winkel φ_g . Es werden aber eine Reihe benachbarter Einfallswinkel ebenfalls zur Wirkung kommen, da von jedem Punkte der Hypotenusenfläche ein ganzer Strahlenkegel nach der Pupille des beobachtenden Auges verläuft. Für jeden dieser Winkel unterhalb von φ_g liegen die Polarisationsverhältnisse ähnlich, im Gebiet der Totalreflexion wird jedoch auch das Glasfeld elliptisch.

Lippich¹⁾ hat bei einer Besprechung dieser Anordnung auf mehrere Fehlerquellen hingewiesen, die im folgenden näher untersucht werden sollen. Er erwähnt als solche insbesondere

1) F. Lippich, Wien. Sitzungsber. Abt. IIa. p. 351. 1896.

1. die durch die Elliptizität hervorgerufene Herabsetzung der Halbschatteneinstellungsgenauigkeit,
2. die Schwierigkeit, eine exakte Trennungslinie zwischen beiden reflektierenden Feldern herzustellen, und
3. die störenden, im Glas sehr leicht auftretenden Spannungen.

Den ersten Punkt können wir theoretisch genau erörtern, während die Fehler 2 und 3 experimentell geprüft und möglichst beseitigt werden müssen.

Wir bestimmen also zunächst die theoretische Genauigkeit mit und ohne Berücksichtigung der Phasendifferenz des Silberfeldes. Die Hauptkomponenten parallel und senkrecht zur Einfallsebene haben (falls wir $E = 1$ setzen) für den reflektierten Strahl die Werte:

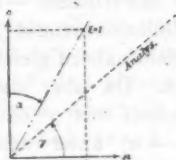


Fig. 8.

$$R_p = \sigma_p \cdot \sin \alpha,$$

$$R_s = \sigma_s \cdot \cos \alpha,$$

wo σ_p und σ_s die Reflexionskoeffizienten bezeichnen. Der beliebig gestellte Analysator lasse nur eine Schwingung durch, die unter dem Winkel γ gegen die Einfallsebene geneigt ist. Das zur Beobachtung gelangende Licht hat dann die Intensität

$$J = R_p^2 \cdot \cos^2 \gamma + R_s^2 \sin^2 \gamma + 2 R_p \cdot R_s \sin \gamma \cos \gamma \cos \Delta_R.$$

Unterscheiden wir durch eingestrichene Buchstaben das am Glasfeld I und durch zweigestrichene das am Silberfeld II reflektierte Licht, so wird Halbschatten ($J'_I - J''_I = 0$) bei einem Analysatorazimut γ_0 eintreten, welches der Gleichung genügt

$$0 = (R_p'^2 - R_p''^2) \cos^2 \gamma_0 + (R_s'^2 - R_s''^2) \sin^2 \gamma_0 + (R_p' R_s' \cos \Delta' - R_p'' R_s'' \cos \Delta'') \sin (2 \gamma_0).$$

Hieraus folgt (wenn wir mit G eine Funktion des Einfallswinkels φ , des Brechungsquotienten n und des Absorptionsindex k bezeichnen):

$$(Ia) \quad \operatorname{tg} \gamma_0 = G \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sigma_p'^2 - \sigma_p''^2} \left\{ \begin{array}{l} -\sigma_p' \sigma_s' \cos \Delta' \\ +\sigma_p'' \sigma_s'' \cos \Delta'' \end{array} \right. \pm \sqrt{\frac{-(\sigma_p'^2 - \sigma_p''^2) \cdot (\sigma_s'^2 - \sigma_s''^2)}{+(\sigma_p' \sigma_s' \cos \Delta' - \sigma_p'' \sigma_s'' \cos \Delta'')^2}} \right\}.$$

Nehmen wir an, daß man auf 1 Proz. genau photometrieren kann, so wird

$$\frac{J_1}{J_n} = 1 + \frac{1}{100},$$

und bezeichnen wir diesen Wert mit C , so erhalten wir für den Analysatorwinkel γ_C , bei dem gerade noch eine Helligkeitsverschiedenheit der beiden Felder sichtbar ist:

$$(Ib) \quad \operatorname{tg} \gamma_C = \mathfrak{S} \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sigma_p'^2 - C \sigma_p''^2} \left\{ \begin{array}{l} -\sigma_p' \sigma_s' \cos \Delta' \\ + C \sigma_p'' \sigma_s'' \cos \Delta'' \end{array} \right. \\ \pm \sqrt{\frac{-(\sigma_p'^2 - C \sigma_p''^2) \cdot (\sigma_s'^2 - C \sigma_s''^2)}{+(\sigma_p' \sigma_s' \cos \Delta' - \sigma_p'' \sigma_s'' \cos \Delta'')^2}}.$$

Die Genauigkeit der Halbschatteneinstellung wird durch die Differenz $\gamma_0 - \gamma_C$ angegeben, für welche man erhält

$$\operatorname{tg}(\gamma_0 - \gamma_C) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \cdot (\mathfrak{G} - \mathfrak{S})}{1 + \mathfrak{G} \cdot \mathfrak{S} \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha} = (\mathfrak{G} - \mathfrak{S}) \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad (\text{für kleines } \alpha).$$

Vernachlässigt man die Elliptizität des Silberfeldes, setzt also $\Delta' = 0$ und $\Delta' = -\pi$, so vereinfachen sich die Formeln sehr erheblich, es wird

$$(II) \quad \operatorname{tg} \gamma_0 = \operatorname{tg} \alpha \frac{\sigma_p'' - \sigma_p'}{\sigma_p'' + \sigma_p'}; \quad \operatorname{tg} \gamma_C = \operatorname{tg} \alpha \frac{\sigma_p'' \sqrt{C} - \sigma_p'}{\sigma_p'' \sqrt{C} + \sigma_p'},$$

wo die σ jetzt absolut zu nehmen sind.

Nach beiden Formeln (I) und (II) kann der Faktor \mathfrak{G} und \mathfrak{S} und die Genauigkeit $\gamma_0 - \gamma_C$ berechnet werden.

Bei der experimentellen Untersuchung der Fehlerquellen 2 und 3 zeigte es sich, daß man durch sorgfältige Herstellung der Silberfelder (ausgeführt von der Firma C. Zeiss in Jena) eine im Halbschattenbilde wenigstens zum großen Teil verschwindende scharfe Trennungslinie erhalten kann. Bleibt dieselbe sichtbar, so vermindert sich die Einstellungsgenauigkeit um mindestens die Hälfte. Schwieriger zu eliminieren ist die von Spannungen des Glases und Ungleichmäßigkeit der aufliegenden Silberschicht herrührende dritte Fehlerquelle. Beides verhindert die gerade bei genauen Messungen (mit kleinem Halbschattenwinkel) notwendige gute Gleichmäßigkeit des Gesichtsfeldes.

Es wurde daher das möglichst spannungsfreie Prisma Nr. 4 versilbert und daran die Messungen angestellt. Die

Silberstreifen lagen senkrecht zur brechenden Kante und waren durch etwa 3 mm breite Glasstreifen getrennt. Die Silberschicht war nahezu undurchsichtig.

Die Größe des runden Gesichtsfeldes mußte manchmal durch eingeschaltete Blenden etwas verkleinert werden, um Aufhellungen am Rande zu beseitigen.

Eine Übersicht über die ermittelten Genauigkeitswerte gibt die folgende Tabelle. Die Serie 3 entspricht einer möglichst guten Anordnung (gleichmäßiges Gesichtsfeld ausgeblendet, große Lichtintensität, gute Silberschicht). In den Serien 1 und 2 sind Messungen an anderen weniger guten Silberschichten mitgeteilt, welche nur zur Vergleichung der Genauigkeit bei verschiedenen Einfallswinkeln dienen sollten. Als Halbschattenwinkel 2α ist der Winkel zwischen der Einstellung auf größte Dunkelheit des Silber- bzw. des Glasfeldes genommen worden. Die Untersuchung wurde auch in das total-reflektierende Gebiet hinein ausgedehnt, um die Änderung der Genauigkeit bei gleichzeitiger Elliptizität des Glas- und Silberfeldes zu prüfen. Unter 4 sind in der Tabelle die theoretischen Werte $\gamma_0 - \gamma_c$ angeführt, und zwar in Reihe I nach Formel (Ia) und (Ib) und in Reihe II nach Formel (II) berechnet.

1				2			
φ	m	g	2α	φ	m	g	2α
$\varphi_0 - 3^\circ 5'$	85"	140"	3°				
— 38'	116	220	10				
— 25'	107	200	10				
	128	230	10				
				φ_0	23"	—	1°
					60	101"	3
					106	184	4
					115	240	6
					1440	2320	40
$\varphi_0 + 21'$	122"	215"	10°				
				$\varphi_0 + 2^\circ 27,6'$	63"	—	1°
					84	—	3
					109	126"	6
				$\varphi_0 + 6^\circ 39,8'$	88"	133"	3°

3				4 (Theoret. Genauigkeit)			
φ	m	g	2α	φ	$\gamma_0 - \gamma_G$		2α
					I (ell.)	II (lin.)	
$\varphi_g - 42'$	12,5"	25"	0,8°				
$\varphi_g - 20,5'$	9	12,6"	0,8°	$\varphi_g - 20,5'$	9,1"	7,9"	1°
	10	14,0	0,8		91	79,0	10
	10,5	19,4	1,6				
	15,5	19,5	0,33				
				φ_g	10"	8,7"	1°
					100	87,0	10
$\varphi_g + 14'$	14"	25"	0,8°				
				$\varphi_g + 2^\circ 27,6'$	11,3"		1°
					113		10

Die theoretischen Werte in 4 zeigen beim Vergleich der Reihen I und II, daß die Elliptizität praktisch sehr wenig in Betracht kommt. Als günstigster Einfallswinkel ergab sich experimentell $\varphi_g - 20'$. Es wurden stets zehn Beobachtungen gemacht. m gibt den mittleren Fehler einer einzelnen Beobachtung und g die größte vorkommende Abweichung vom arithmetischen Mittel an. Bei genügend heller Lichtquelle war 1° der günstigste Halbschattenwinkel. Theoretisch sollte $\gamma_0 - \gamma_g$ dann ungefähr 7" sein; als mittlerer Fehler wurde 9–11" gefunden, also dem theoretischen Wert befriedigend nahe. m war wie in der Theorie ungefähr proportional dem Halbschattenwinkel. Die erreichte Genauigkeit dürfte für die Zwecke von polarimetrischen Messungen vollauf genügen. Für die Farben grün und gelb war die Genauigkeit wenig verschieden, blau dagegen ließ sich sehr schlecht einstellen.

Das *Ergebnis* der vorstehenden Untersuchungen kann etwa folgendermaßen zusammengefaßt werden:

1. Es ist zum erstenmal die Abhängigkeit des Phasendifferenzverlaufes im Gebiet der *Totalreflexion* von der durch Druckspannungen hervorgerufenen Anisotropie des total reflektierenden Materials untersucht worden. Einseitiger Druck änderte die Phasendifferenz für jeden Einfallswinkel um nahezu den gleichen Betrag. Diese Phasendifferenzänderung wächst

mit dem Druck und kehrt für hohen Brechungsquotienten ihr Vorzeichen um. Letzteres steht in Übereinstimmung mit den Messungen von Pockels über akzidentelle Doppelbrechung im durchgehenden Licht. Abweichungen von den durch die theoretische Formel von Fresnel geforderten Phasendifferenzwerten im Gebiete der Totalreflexion konnten zum großen Teil durch Druckspannungen in den betreffenden Prismen erklärt werden. Die erwähnte Formel scheint also für jeden Brechungsquotienten bei spannungsfreien Medien die Messungen richtig darzustellen.

2. Durch eingehende Genauigkeitsmessungen wurde festgestellt, daß der „elliptische Halbschattenanalysator“ nach Zakrzewski eine etwa doppelt so genaue Einstellung des Kompensators ermöglicht, wie die Auslöschungsmethode mittels des einfachen Analysators.

3. Für das von Lummer angegebene Halbschattenprinzip wurden theoretisch und experimentell die günstigsten Anordnungsbedingungen festgestellt. Zahlreiche Bestimmungen der Nullpunktgenauigkeit ergaben, daß der relativ kleinste mittlere Fehler von $9''$ bei etwa 1° Halbschatten durch Reflexion kurz vor dem Grenzwinkel der Totalreflexion zu erzielen ist.

(Eingegangen 18. Dezember 1909.)

**8. Thermischer Molekulardruck
der Gase in Röhren und porösen Körpern;
von Martin Knudsen.**

In einem früheren Aufsatz ¹⁾ habe ich gezeigt, daß der Gasdruck in einer Röhre, in der ein Temperaturfall stattfindet, im Gleichgewichtszustande an verschiedenen Stellen verschiedene Werte haben wird. Die angestellten Versuche ergaben eine Übereinstimmung mit der Annahme, daß die Drucke p_1 und p_2 an zwei verschiedenen Stellen der Röhre durch die Gleichung

$$(1) \quad \frac{p_1}{p_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$$

mit den absoluten Temperaturen T_1 und T_2 verbunden waren unter der Voraussetzung, daß der Röhrendurchmesser verschwindend klein ist im Verhältnis zur mittleren Weglänge der Moleküle. Ist dagegen die mittlere Weglänge der Moleküle verschwindend klein im Verhältnis zum Röhrendurchmesser, so gilt die Gleichgewichtsbedingung

$$(2) \quad \frac{p_1}{p_2} = 1.$$

Im folgenden soll die Richtigkeit der Gleichung (1) dargetan werden durch mehr direkte Versuche als die früher beschrieben, eine Analogie mit der elektrischen Induktion soll besprochen werden, und dann wird gezeigt, wie man sich durch Messung der Drucke und der entsprechenden Temperaturen einen Begriff von der Größe der Poren eines porösen Körpers bilden kann.

Im Innern einer im Durchmesser 7,5 mm messenden Glasröhre wurde ein Pfropfen von festgestampftem ausgeglühtem Asbest angebracht. Über diesem Pfropfen wurde ein 7,6 cm langer Pfropfen von Magnesiapulver angebracht, das beim Einfallen fest zusammengestoßen wurde, so daß es an den Seiten der Glasröhre fest anschloß. Über dem Magnesiapfropfen wurde

1) M. Knudsen, Ann. d. Phys. 31. p. 205. 1910.

wieder ein Asbestpfropfen angebracht. Die beiden Asbestpfropfen sollten hindern, daß das Magnesiapulver herausfalle oder sich beim Auspumpen teile. Jedes Ende der Röhre wurde mit einem McLeod-Manometer verbunden.

Der Apparat wurde mit Wasserstoff von 0,3000 mm Quecksilberdruck gefüllt, worauf die Glasröhre am einen Ende des Magnesiapfropfens bis auf $248,5^{\circ}$ elektrisch erwärmt wurde, wodurch das andere Ende des Magnesiapfropfens eine Temperatur von $21,9^{\circ}$ erhielt. Diese Temperaturen sind die mittleren Zahlen einer Reihe von Messungen, die im Laufe von einigen Tagen unternommen wurden; so lange dauerte der Versuch. Es wurden Quecksilberthermometer benutzt, deren Behälter die Stellen der Glasröhre berührten, deren Temperatur gemessen werden sollte. Um Thermometerbehälter und Glasröhre wurde ein Stück Asbest gewickelt, und um dieses ein dünnes Kupferblech. Um dieses wurde schließlich der Heizdraht der Verbindung angebracht, die erwärmt werden sollte. In dieser Weise wurde dafür gesorgt, daß die Glasröhre und somit das eine Ende des Magnesiapfropfens nahezu dieselbe Temperatur hatten wie der Thermometerbehälter. Die hohe Temperatur wurde in bezug auf die gewöhnlichen Thermometerfehler und den herausragenden Faden korrigiert. Da der Heizstrom nicht ganz konstant war, schwankte die hohe Temperatur um einige Grade. Die Angaben der Manometer p_1' und p_2' wurden während des Versuches dreimal durch Ablesung festgestellt, wodurch es sich ergab, daß die Erwärmung, wie zu erwarten war, eine Drucksteigerung in dem Manometer verursachte, das mit dem erwärmten Ende des Magnesiapfropfens direkt verbunden war.

Die folgende Tabelle enthält die abgelesenen und korrigierten Drucke p_1' und p_2' nebst der Zeit τ in Stunden und Minuten, die bei der Druckmessung seit dem Beginn des Versuches verlaufen war.

τ	p_1' mm Hg	p_2' mm Hg	$p_1' - p_2'$
0	0,3000	0,3000	0,0000
18 ^b 25'	0,3308	0,2716	0,0592
23 25	0,3347	0,2693	0,0654
46 50	0,3414	0,2641	0,0773
∞	0,3428	0,2628	0,0800

Die bei $\tau = \infty$ angeführten Werte der Drucke wurden durch Extrapolation aus zwei Paaren der übrigen gefunden. Man sieht, daß sie nur wenig von den Drucken abweichen, die nach fast 48 Stunden gemessen wurden, so daß die Extrapolation mit ziemlich großer Sicherheit ausgeführt werden konnte. Die Rechnung ist ausgeführt unter der Voraussetzung, daß die Gasmenge, die in einem Zeitelement zur Zeit τ in der Richtung von p_1' nach p_3' durch den Magnesiapfropfen strömt, der Größe $(p_1' - p_3')_\tau - (p_1' - p_3')_\infty$ proportional ist, wo $(p_1' - p_3')_\infty$ den gesuchten Druckunterschied bezeichnet, der nach langer Zeit zum Vorschein kommen würde. Unter dieser Annahme ist der der Zeit τ entsprechende Druckunterschied $(p_1' - p_3')_\tau$ bestimmt durch

$$\log \frac{-(p_1' - p_3')_\infty}{(p_1' - p_3')_\tau - (p_1' - p_3')_\infty} = k \tau,$$

wo k eine Konstante während des ganzen Versuches bezeichnet. Wenden wir diese Gleichung auf die dritte und vierte Messung der Drucke an, so finden wir $(p_1' - p_3')_\infty = 0,0800$, wie in der Tabelle angeführt, und $k = 0,0005259$, in dem gewöhnliche Logarithmen benutzt werden und τ in Minuten angegeben ist. Benutzen wir die Formel mit dem hier gefundenen Wert von k zur Berechnung des Druckunterschiedes bei $\tau = 18^h 25'$, so finden wir $p_1' - p_3' = 0,0590$. Der entsprechende beobachtete Druckunterschied der Tabelle war 0,0592. Aus dieser Übereinstimmung sieht man, daß die angewandte Extrapolationsmethode richtig ist, und daß die Durchströmung wirklich dem als gültig vorausgesetzten Gesetze folgt.

Wir dürfen hieraus schließen, daß die Strömung eines Gases durch eine Röhre oder einen porösen Körper, worin ein Temperaturfall stattfindet, einem Gesetze folgt, das dem der Strömung der Elektrizität durch ein Leitungsstück, worin sich eine z. B. von einem Element herrührende elektromotorische Kraft findet, ganz analog ist. Diese Analogie läßt sich weiter führen, denn jede Änderung der Stromstärke des Gases, hervorgerufen durch Änderungen der Drucke p_1 und p_3 , verursacht Temperaturänderungen im Gase und damit auch in der Röhre, und die so entstandene Temperaturdifferenz wird der Stromstärkeänderung entgegenwirken. Wird z. B. der Druck p_1 ver-

größert, während p_2 ungeändert bleibt, vergrößert sich auch die Stromstärke des Gases. Durch die Arbeitsleistung, welche erforderlich ist, um p_1 zu vergrößern, steigt aber die Temperatur T_1 des Gases, welche durchströmen soll. Das Verhältnis T_1/T_2 wird somit vergrößert und gibt dem Gas eine Tendenz in der Richtung nach höherer Temperatur oder wachsendem Druck zu strömen. Die Stromstärke des Gases wird dadurch geringer als sie es ohne diese Temperaturänderung sein würde, ganz wie eine wachsende elektrische Stromstärke eine elektromotorische Gegenkraft durch die Selbstinduktion hervorruft. Es ist leicht ersichtlich, daß eine Verkleinerung von p_1 einen induzierten thermischen Molekulardruck hervorbringt, welcher die Stromstärke des Gases zu vergrößern sucht. Auch ein der gegenseitigen Induktion etwas analoges Phänomen läßt sich durch die Gasströmung erzeugen. Die bei einer Vergrößerung von p_1 in der erwähnten (primären) Röhre hervorgerufene Temperaturerhöhung wird nämlich eine derartige Erwärmung in einer benachbarten (sekundären) Röhre hervorbringen, daß in dieser Röhre eine Gasströmung entsteht, welche der primären entgegengerichtet ist, vorausgesetzt, daß die Röhre einen engen Teil einer in sich zurücklaufenden Röhre bildet.

Da wir durch die Extrapolation $(p_1' - p_2')_\infty = 0,8000$ fanden, werden die Werte, gegen welche die Drucke p_1' und p_3' bei nach ∞ hin wachsendem τ konvergieren, $p_1' = 0,3428$ und $p_3' = 0,2628$. Während der hier angeführte Druck p_3' derselbe ist wie der Druck p_2 am kalten Ende des Magnesiapfropfens, das dieselbe Temperatur hat wie das damit verbundene Manometer, bezeichnet p_1' den in dem anderen Manometer gemessenen Druck. Zwischen diesem und dem warmen Ende des Magnesiapfropfens besteht indessen eine Temperatursteigerung, und somit eine Drucksteigerung. Ist deren Größe p'' , so ist der am warmen Ende des Magnesiapfropfens tatsächlich herrschende Druck bestimmt durch $p_1 = p'' + 0,3428$. Zur Bestimmung der Drucksteigerung p'' kann man bemerken, daß der Temperaturfall in einer Röhre stattfindet, deren Durchmesser 0,75 cm ist. Im Vergleich hiermit ist die mittlere Weglänge der Wasserstoffmoleküle λ bei einem Druck von 0,34 mm Quecksilberdruck $\lambda = 0,048$ cm. Die mittlere Weg-

länge ist also ein kleiner Bruchteil des Röhrendurchmessers, woraus folgt, daß p'' im Verhältnis zu p_1 eine kleine Größe sein muß.

Zur Berechnung von p'' wird die Formel

$$(3) \quad \frac{dp}{dT} = \frac{0,00139 \frac{1 + \frac{C}{273}}{1 + \frac{C}{T}} \frac{\eta_0}{\sqrt{q_0}} k_1}{R + 25,98 \frac{\sqrt{q_0}}{\eta_0} \frac{1 + \frac{C}{T}}{1 + \frac{C}{273}} R^2 \frac{p}{T}}$$

angewendet, wo die Buchstaben die im umstehend zitierten Aufsatz angegebene Bedeutung haben. Setzen wir $k_1 = 1,4$ und

$$\frac{1 + \frac{C}{273}}{1 + \frac{C}{T}} = 1,08$$

in dem hier benutzten Temperaturintervall, so haben wir annäherungsweise $p'' = 0,0040$ und also $p_1 = 0,3468$.

Dieser Wert in Verbindung mit dem oben angeführten Wert von p_2 ergibt

$$\frac{p_1}{p_2} = 1,320.$$

Aus den beobachteten absoluten Temperaturen T_1 und T_2 bekommt man für p_1/p_2 den Konvergenzwert

$$\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} = 1,329.$$

Der genauere Ausdruck

$$\frac{p_1}{p_2} = \left(\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} \right)^{1 + \frac{2R}{A}},$$

wo $2R = 0,00068$ gesetzt wird (vgl. später), ergibt

$$\frac{p_1}{p_2} = 1,318$$

also eine gute Übereinstimmung mit der Beobachtung.

Eine andere ähnliche Versuchsreihe mit Wasserstoff ergab bei ca. 13mal so großem mittleren Druck wie im vorigen Falle folgende Resultate:

t	p_1'	p_2'	$p_1' - p_2'$
0	3,871	3,871	0,000
24 ^b 05'	4,239	3,527	0,712
48 10	4,325	3,451	0,874
71 15	4,341	3,428	0,913
∞	4,346	3,424	0,922

Aus den drei ersten Druckmessungen werden in derselben Weise wie vorhin ($p_1' - p_2', \infty = 0,922$ und $k = 0,0004449$ berechnet. Daß k hier ca. 16 Proz. kleiner ist als beim niedrigeren Druck bedeutet, daß die Ausgleichung schneller vonstattengeht beim niedrigen Druck als beim hohen, was mit den Gesetzen von der Strömung der Gase durch enge Röhren übereinstimmt. Berechnet man aus dem hier gefundenen Wert von k den Wert von $p_1' - p_2'$ nach 71^b 15' seit dem Beginn des Versuches, so erhält man 0,910, während der beobachtete Druckunterschied der Tabelle 0,913 ist, also eine hinreichende Übereinstimmung.

Wegen der Temperatursteigerung in der Glasröhre an den Stellen, wo sich der Magnesiapfropfen nicht befindet, muß p_1' mit 0,0005 korrigiert werden. Die Drucke an den Enden des Magnesiapfropfens im Gleichgewichtszustande sind also $p_1 = 4,347$ und $p_2 = 3,424$, woraus folgt

$$\frac{p_1}{p_2} = 1,271,$$

während

$$\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} = 1,323.$$

Wir finden also hier eine Abweichung von der Gleichung

$$\frac{p_1}{p_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}},$$

und diese Abweichung erklären wir uns daraus, daß der Abstand zwischen den Magnesiasteilchen nicht hinreichend klein ist im Verhältnis zur mittleren Weglänge.

Bei zylindrisch zirkularer Röhre habe ich früher gefunden,

daß der Druck p im Gleichgewichtszustand mit der absoluten Temperatur T verbunden ist durch die Gleichung

$$\frac{dp}{p} = \frac{1}{1 + \frac{2R}{\lambda}} \frac{1}{2} \frac{dT}{T},$$

welche annäherungsweise gültig ist, wenn der Röhrendurchmesser $2R$ klein ist im Verhältnis zur mittleren Weglänge λ . Durch Integration ergibt diese Gleichung, wenn man von der Variation der mittleren Weglänge mit der Temperatur absieht

$$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{2R}{\lambda}}},$$

was in

$$\frac{p_1}{p_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$$

übergeht, wenn $2R$ verschwindend klein ist im Verhältnis zu λ . Wird die Gleichung auf die angeführten Messungen angewendet, so erhält man

$$1,271 = 1,323^{\frac{1}{1 + \frac{2R}{\lambda}}},$$

woraus folgt $2R/\lambda = 0,168$.

Bei einem mittleren Druck von 3,9 mm Quecksilber ist die mittlere Weglänge der Wasserstoffmoleküle λ cm, 0,0040 cm und somit

$$2R = 0,00068 \text{ cm.}$$

Also darf man erwarten, daß eine Röhre von diesem Durchmesser denselben Wert des Verhältnisses p_1/p_2 ergeben würde, den wir beim Magnesiapfropfen fanden, und man kann deshalb mit einem gewissen Recht annehmen, daß dessen Poren durchschnittlich ungefähr derselben Größe sind.

Nachtrag. Prof. K. Prytz hat meine Aufmerksamkeit auf eine Arbeit von O. Reynolds¹⁾ hingelenkt. Reynolds hat eine große Menge Versuche ausgeführt von ähnlicher Art wie die hier beschriebenen. Er untersucht die „thermische Transpiration“ durch poröse Platten aus Gips und Meeresschaum

1) O. Reynolds, Phil. Trans. p. 727. London 1879. Ausführliche Besprechung von O. E. Meyer, Beibl. p. 455. 1882.

und erklärt die Resultate durch die kinetische Theorie. So wird unter anderem der Satz

$$\frac{p_1}{p_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$$

gegeben. Dieser Satz wurde doch nicht genau experimentell bestätigt, indem Reynolds die Temperaturen T_1 und T_2 nicht direkt gemessen hat.

Maxwell¹⁾ schlägt vor, die von Reynolds beobachtete Erscheinung „thermische Effusion“ zu nennen, weil er meinte, daß die Strömung der Gase durch poröse Körper ähnlichen Gesetzen folgen, wie die Strömungen durch Öffnungen in einer dünnen Wand. Maxwell behandelt auch theoretisch die Strömung der Gase durch enge Röhren in ihre Abhängigkeit von Druck und Temperaturgradient, und gelangt mit Verwendung der Resultate aus Kundt und Warburgs Versuchen über Gleitung zu folgender Gleichung für den Gleichgewichtszustand

$$\frac{dp}{dT} = 6 \frac{\eta}{\varphi T} \frac{1}{R^2 + 4 G R},$$

wo G den Gleitungskoeffizienten bedeutet.

In Vergleich hiermit gibt meine Formel (3), welche Verwendung findet, wenn $2R$ groß gegen λ ist, und wenn entsprechende Bezeichnungen eingeführt werden, indem

$$G = \frac{8 \sqrt{2} \eta}{3 \sqrt{\pi} \sqrt{\varphi_1 p}} \quad 0,81$$

gesetzt wird²⁾

$$\frac{dp}{dT} = 4 k_1 \frac{\eta^2}{\varphi T} \frac{1}{R^2 + 6,1 G R}.$$

Die formelle Übereinstimmung ist also vollkommen, nur die Konstanten sind etwas verschieden.

Köbenhavns Universitet, Dezember 1909.

1) J. Clerk-Maxwell, Phil. Trans. p. 231. London 1879.

2) M. Knudsen, Ann. d. Phys. 28. p. 119. 1909.

(Eingegangen 18. Dezember 1909.)

